COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS
SUR LES SINGULARITÉS
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES

PROFESSÉES A L'UNIVERSITE DE BUDAPEST

PAR

PAUL DIENES
Privat-Docent

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1913

LEÇONS
SUR LES SINGULARITÉS
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES.

A LA MÊME LIBRAIRIE

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE ÉMILE BOREL,
PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par ÉMILE BOREL; 1898.................. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par ÉMILE BOREL; 1900........ 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par ÉMILE BOREL; 1901... .... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, rédigées par *R. d'Adhémar;* 1902......... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, rédigées par *Ludovic Zoretti;* 1903. ...... 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE; 1904.... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale par ÉMILE BOREL, rédigées par *Maurice Fréchet,* avec des Notes de PAUL PAINLEVÉ et de HENRI LEBESGUE; 1905... .... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy;* 1905.............. 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF; 1905.............................. 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE; 1906.............................. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, professées au Collège de France par PIERRE BOUTROUX, avec une Note de PAUL PAINLEVÉ; 1908..................... 6 fr. 50

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par OTTO BLUMENTHAL; 1910................................. ... . 5 fr. 50

Leçons sur la théorie de la croissance, par ÉMILE BOREL, rédigées par *A. Denjoy;* 1910.. 5 fr. 50

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par PAUL MONTEL; 1910....................................... 3 fr. 50

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France par LUDOVIC ZORETTI; 1910............................... 3 fr. 75

SOUS PRESSE :

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, par VITO VOLTERRA.

Leçons sur les fonctions quasi-périodiques, par J. HADAMARD.

Leçons sur les fonctions de lignes, par VITO VOLTERRA.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THEORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS SUR LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PROFESSÉES A L'UNIVERSITÉ DE BUDAPEST

PAR

PAUL DIENES,

Privat-Docent.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

52419368

Pam

car/sep
MATH

PRÉFACE.

L'étude systématique des singularités des fonctions analytiques commence par la *Thèse* de M. Hadamard parue dans le *Journal de Mathématiques*, en 1892. Ce Mémoire, devenu déjà classique, a exercé d'abord son influence par les beaux résultats de sa deuxième Partie consacrée à l'étude des singularités polaires; toute une série de géomètres, parmi lesquels MM. Fabry, Leau, Le Roy, etc. se sont efforcés d'arriver à des résultats également concrets. La meilleure preuve de leur succès est l'exposé bien connu que M. Hadamard a publié, en 1901, sous le titre *La série de Taylor et son prolongement analytique* dans la collection « Scientia ». Il est à remarquer cependant que la plupart des théorèmes ainsi établis ne font que déterminer des conditions suffisantes ou bien pour que le point 1 soit le seul point singulier sur le cercle de convergence ou dans le plan complexe entier, ou bien pour que le cercle de convergence soit une coupure, et, chose curieuse, souvent les méthodes bien différentes conçues par ces auteurs n'arrivent qu'à reproduire les mêmes résultats. M. Hadamard a signalé la cause des difficultés de ces recherches en établissant une distinction fondamentale concernant les méthodes à suivre dans l'étude des singularités.

Considérons, en effet, une fonction analytique définie par son développement taylorien

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et par le prolongement analytique de cet élément de fonction. Il y a d'abord des méthodes qui ne supposent aucune restriction sur les coefficients a_n. Il s'agit donc en ce cas d'étudier les propriétés générales de la fonction analytique et en particulier celles de ses singularités. L'importance des recherches de ce genre est évidemment très grande. Mais il est à craindre, ajoute M. Hadamard, que ces résultats ne restent toujours trop peu nombreux.

On peut supposer d'autre part que la fonction à étudier appartienne à une classe bien connue de fonctions et il s'agit alors de caractériser cette classe de fonctions, c'est-à-dire les propriétés qui la définissent, par les propriétés limites des coefficients.

Ayant établi cette distinction, M. Hadamard, pour mieux assurer le progrès des études de ce genre, propose de prendre entre ces points de vue opposées *une position intermédiaire convenable*. C'est une telle position que nous avons tâché de choisir dans le présent Ouvrage.

Pour faire mieux ressortir l'idée directrice qui nous a guidé dans ce choix du nouveau point de vue, faisons une remarque simple qui paraîtra d'abord presque banale. Il n'est pas exact de dire que les propriétés de la fonction analytique définie par une série de Taylor sont déterminées par les propriétés limites des coefficients de la série. La forme même du développement entre aussi en jeu et son rôle n'est pas négligeable. Il faut donc replacer les coefficients dans la série et chercher des relations entre l'allure de la série et l'allure de la fonction. Plus généralement, la détermination de la fonction par le prolongement analytique d'une série de Taylor est mathématiquement très compliquée, ce n'est que logiquement qu'elle est réalisée; nous devons conquérir pour les mathématiques cette notion purement logique de la fonction; en d'autres termes, il faudra représenter tout le contenu de ce concept à l'aide des moyens dont nous disposons dans l'analyse mathématique. Voilà le but de la théorie générale des fonctions analytiques, du moins au point de vue de Méray-Weierstrass qui est aussi le nôtre. Il s'agit donc d'établir des relations à la fois générales et précises entre fonction et représentation.

Quel sera maintenant notre point de vue intermédiaire? Sauf dans des cas exceptionnels ou pour élucider des problèmes déjà posés, nous ne ferons aucune hypothèse restrictive sur les coefficients a_n. Nos résultats entreront donc dans la théorie générale des fonctions analytiques. D'autre part nous choisirons en même temps des singularités plus ou moins particulières, telles que les pôles, les points critiques algébriques ou algébrico-logarithmiques, ou bien des singularités plus générales comme, par exemple, celles où l'on suppose que la fonction soit bornée dans un certain voisinage d'un point ou bien qu'elle ne le soit pas, etc., et nous chercherons à établir des relations précises entre ces singularités et l'allure de la représentation (une suite de polynomes ou de fonctions entières dans l'espèce) si l'on y substitue l'affixe du point singulier en question. Ainsi, tout en conservant la généralité, nous aboutirons à des résultats concrets qui feront partie d'une étude plus particulière des fonctions analytiques. On pourrait résumer notre point de vue en disant que nous chercherons à représenter les singularités par la nature particulière de la divergence que la représentation présente au point envisagé.

Toutes les recherches de ce genre sont inspirées par la troisième Partie du Mémoire fondamental de M. Hadamard. Mais les vues profondes de l'illustre géomètre sont restées sans influence jusqu'au jour où, à la suite des travaux très importants de M. Borel et de ceux de M. Mittag-Leffler, la représentation de la fonction dans ses points réguliers a reçu une solution aussi générale qu'inattendue. En effet, si l'on ne spécialise pas la classe des fonctions analytiques envisagées, l'étude générale de la singularité en un point signifie l'étude des valeurs régulières au voisinage de ce point. Donc on a été obligé de conquérir d'abord, par une formule aussi simple et aussi compréhensive que possible, les valeurs régulières de la fonction à examiner. Ce n'est que par ces recherches que le chemin s'est ouvert pour *une théorie générale des singularités* dont nous tâchons de donner la première esquisse dans le présent Ouvrage.

Pour rendre plus facile la lecture de ce qui va suivre, nous avons établi à leur place les propriétés essentielles de chacune des représentations dont nous nous sommes servi au cours de ce Livre. Nous avons espéré répondre ainsi aux intentions de M. Borel à qui nous présentons ici nos vifs remercîments d'avoir bien voulu nous donner l'occasion d'exposer nos recherches dans sa Collection. En dehors de la connaissance des propriétés élémentaires des fonctions analytiques, les *Leçons* de M. Lebesgue *sur les séries trigonométriques* sont le seul Ouvrage dont la connaissance est désirable pour la lecture du présent Livre.

Nous ne pouvons pas enfin passer sous silence la collaboration continue et si efficace de M^me^ Valérie Dienes qui n'a jamais cessé de nous prêter son précieux concours pendant toute la rédaction de ce Livre. De la démonstration de quelques théorèmes nouveaux jusqu'à la revision des épreuves, elle a pris sa part de tout le travail qu'exigeait la rédaction, et il y a bien peu de pages qui n'aient ressenti l'effet de ses conseils soigneux.

PAUL DIENES.

Budapest, février 1912.

LEÇONS
SUR LES SINGULARITÉS
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE I.

LES RECHERCHES DE M. HADAMARD. L'ORDRE D'UN POINT SINGULIER.

1. Considérons une fonction analytique de x définie par la série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1}$$

et par le prolongement analytique de cet élément de fonction au sens de Weierstrass. La fonction étant complètement déterminée par la suite des coefficients a_n, toutes ses propriétés doivent se révéler dans la structure de ces coefficients tayloriens. Il s'agit de mettre en évidence les relations de ce genre. Par exemple, en partant des coefficients envisagés, on a pu construire des expressions analytiques telles, qu'au lieu d'une infinité de séries de Taylor, une seule formule mathématique relativement simple, comme une série de polynomes ou une série de fonctions entières, représente la fonction dans un domaine d'holomorphie de plus en plus étendu.

Dans cet ordre d'idées, le problème des singularités se pose de la façon suivante : il s'agit d'établir des rapports à la fois précis et généraux entre l'allure de cette formule représentative pour une valeur singulière x_0 et l'allure de la fonction au voisinage de ce point singulier. Nous chercherons donc à représenter la fonction analytique, même en ses points singuliers, dans un sens tel que l'allure singulière de la formule, si l'on y substitue l'affixe d'un point singulier, nous décèle la nature de la singularité en ce point.

LA DÉRIVÉE GÉNÉRALISÉE DE RIEMANN ET L'OPÉRATION H^{α}.

2. Pour ces recherches, il est indispensable de définir exactement quelques espèces d'*allures* de la fonction au voisinage d'un point singulier. Tout d'abord, on a la notion plus ou moins précise du degré d'infinitude de la fonction à un tel point x_0. On dit en effet que la fonction devient infinie du degré r si le rapport de la fonction à l'expression

$$\frac{1}{(x-x_0)^r} \tag{2}$$

reste fini, non nul, quand on s'approche de x_0. En général, cependant, la valeur-limite de ce rapport pour $x = x_0$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, même après qu'on a fixé un chemin aboutissant à x_0, c'est-à-dire pour le même chemin, elle peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ selon les points choisis pour arriver à x_0. Il faut donc introduire une mesure plus précise pour caractériser la singularité tout en ayant soin pourtant qu'une singularité de la forme (2) soit mesurée par le nombre r.

Remarquons pour cela que, k étant le premier entier supérieur à r, l'intégration de (2) répétée k fois atténue déjà la singularité en x_0. En effet, après l'opération indiquée, on a une fonction finie et continue à ce point. On pourrait donc mesurer la singularité par sa résistance à une opération semblable. C'est l'idée de M. Darboux, développée si ingénieusement par M. Hadamard [1].

On voit que l'intégration ordinaire ne peut déceler ainsi que la partie entière de r. En général, par cette opération, les singularités considérées, dont les degrés d'infinitude diffèrent de moins d'une unité, ne sont pas distinguées l'une de l'autre. Pour y arriver, M. Hadamard s'est servi de l'intégration et de la différentiation

[1] J. HADAMARD, *Essai sur l'étude de fonctions données par leur développement de Taylor. Thèse, Paris* et *Journal de Mathématiques*, 1892. Partie III.

d'indice fractionnaire ou incommensurable définies par Riemann (¹).

Mais ici une objection importante se pose. On veut définir pour une fonction analytique quelconque une opération en vue d'atténuer ses singularités. Est-ce qu'une telle opération qui, au fond, consiste à multiplier les coefficients tayloriens par des nombres c_n, n'introduit pas des points singuliers nouveaux? Évidemment non s'il s'agit de la différentiation et de l'intégration ordinaire. Il faut se rassurer qu'il en est de même de l'opération plus générale pour que la simplification des singularités visée par nous ne soit pas purement fictive.

Nous allons établir à cet égard un théorème dont la portée dépasse de beaucoup l'application que nous en ferons.

3. Soit donnée une fonction $v(t)$ définie entre o et 1 et telle que l'intégrale

$$\int_0^1 |v(t)|\,dt \tag{3}$$

ait un sens. Nous allons montrer que les sommets de l'étoile principale attachée à la fonction

$$\varphi(x)=\int_0^1 v(t) f(xt)\,dt \tag{4}$$

sont tous des sommets de l'étoile attachée à $f(x)$.

L'étoile principale d'une fonction analytique est définie de la manière suivante. Soit x_0 le premier point singulier rencontré par un rayon issu de l'origine (ce point peut être l'infini). Supprimons la partie du rayon qui continue le segment (o, x_0) à l'infini, et effectuons la même opération pour chaque rayon partant de l'origine. Le domaine ainsi obtenu est l'étoile principale de centre O attachée à la fonction $f(x)$ holomorphe à l'origine. Les points x_0 ainsi mis en évidence sont les sommets de l'étoile.

Supposons que le point x se trouve à l'intérieur de l'étoile. Quand t va de o à 1, le produit xt décrit le segment (o, x) dans chaque point duquel $f(x)$ est holomorphe; son module a donc un

(¹) B. Riemann, *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*; 1847, *Mathematische Werke*, 2te Auflage, p. 353.

maximum fini. Il en résulte que l'intégrale (4) a un sens pour chaque point à l'intérieur de l'étoile.

Mais on voit facilement que la fonction ainsi définie a une dérivée bien déterminée dans tous les points envisagés. En effet, pour h assez petit, le triangle formé par les points o, x, $x+h$ se trouve nécessairement à l'intérieur de l'étoile, de sorte que, dans l'expression

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_0^1 v(t)[f(xt+ht)-f(xt)]\,dt,$$

la quantité entre les crochets peut s'écrire

$$f(xt+ht)-f(xt)=ht[f'(xt)+\theta\varepsilon],$$

où $|\theta|<1$ et ε tend vers o avec h indépendamment de t. Ce qui nous donne

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\int_0^1 v(t)tf'(xt)\,dt+\varepsilon\int_0^1 \theta\, t\, v(t)\,dt.$$

Chacune des deux intégrales ayant un sens bien déterminé et la seconde étant inférieure à $\int_0^1 |v(t)|\,dt$, quantité indépendante de h, la proposition est établie.

Si l'on prend pour $f(x)$ la série (1), on a

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n x^n \tag{5}$$

avec

$$c_n=\int_0^1 v(t)t^n\,dt. \tag{6}$$

On peut donc remplacer les a_n par $c_n a_n$ sans introduire des sommets nouveaux.

4. Nous allons généraliser ce résultat de M. Hadamard. Si l'on choisit pour $v(t)$ une fonction plus particulière, par exemple une fonction analytique de t holomorphe partout, sauf peut-être aux points o, 1, ∞, et telle que, au voisinage de o,

$$|v(t)|<\frac{1}{|t|^k}\qquad (k<1) \tag{7}$$

et, au voisinage de 1,

$$(7) \qquad |v(t)| < \frac{1}{|1-t|^k},$$

chaque point singulier de la fonction $\varphi(x)$, *définie par la série*

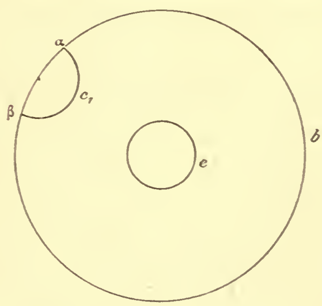
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n x^n,$$

et par son prolongement analytique, est un point singulier de $f(x)$.

Pour le démontrer, remarquons tout d'abord qu'on peut prendre l'intégrale (6) le long d'une courbe rectifiable quelconque l sans changer sa valeur. En effet *cette courbe*, *ensemble* avec le segment (0, 1), forme une courbe fermée se décomposant peut-être en plusieurs autres. Au cas où ni le point 1 ni 0 n'est à l'intérieur ou sur le contour d'une pareille boucle b, l'intégrale, prise le long de ce contour, est identiquement zéro d'après le théorème fondamental de Cauchy. Si 0 ou 1 sont sur le contour ou à l'intérieur d'une boucle, on sépare ces points du contour par un petit arc de cercle c_1, ou par un petit cercle c, et l'on écrit (*fig.* 1)

$$\int_{\alpha c_1 \beta} v(t) t^n \, dt + \int_{\beta b \alpha} v(t) t^n \, dt + \int_c v(t) t^n \, dt = 0.$$

Fig. 1.



Mais, en vertu des hypothèses (7) faites sur $v(t)$, on a

$$\left| \int_{\alpha c_1 \beta} v(t) t^n \, dt \right| < A \rho^{1-k} \qquad \text{et} \qquad \left| \int_c v(t) t^n \, dt \right| < B \sigma^{1-k},$$

où ρ et σ sont les rayons arbitrairement petits des cercles c_1 et c; A, B sont deux nombres fixes. Comme ρ est aussi petit qu'on veut, il en résulte que l'intégrale

$$\int_b v(t)\, t^n\, dt$$

a un sens parfaitement déterminé, et comme σ est aussi arbitrairement petit, cette valeur ne peut être que zéro.

L'intégrale (6) est donc zéro pour chaque courbe fermée, donc en particulier

$$\int_l v(t)\, t^n\, dt + \int_{1-0} v(t)\, t^n\, dt = 0, \tag{8}$$

ce qui était à montrer.

Examinons maintenant les points réguliers de $f(x)$. Cette fonction est en général multiforme; on doit donc considérer chaque point ensemble avec un chemin qui y conduit. On sait que tous les chemins possibles, c'est-à-dire les chemins qui ne passent par aucun point singulier, se trouvent nécessairement à l'intérieur d'un nombre fini de cercles successifs empiétant les uns sur les autres. Il suffit donc de considérer les lignes rectifiables ou même les polygones d'un nombre fini de côtés; tous les autres chemins sont équivalents à ceux-ci.

Soit donné une telle ligne L et désignons pour un instant ses points par y. Quand y varie de o jusqu'à un point x de L, fixé pour le moment, le rapport $t = \frac{y}{x}$ décrit une courbe l^x allant de o à 1. Ainsi, à chaque point de L on fait correspondre un chemin l qui servira de chemin d'intégration dans l'intégrale (4). Cette intégrale, prise le long d'un l ainsi défini, a un sens bien déterminé, car, quand t parcourt l, xt décrit L jusqu'au point x (nous désignerons cette partie de L par L^x) et, par hypothèse, $f(y)$ est holomorphe en tous ses points. Le point x étant fixé, regardons le point $x+h$. Quand t parcourt l^x, le produit $t(x+h)$ décrit une ligne nouvelle, L_1^{x+h}. Il est évident que si h tend vers zéro, la ligne L_1^{x+h} s'approche indéfiniment de L^x, de sorte que, pour $|h|$ assez petit, toutes les deux courbes L_1^{x+h} et L^x, qui correspondent à la même courbe l^x, se trouvent à l'intérieur du même domaine d'holomorphie de $f(x)$. Par conséquent, on peut répéter sans aucun changement le raisonnement de tout à l'heure concernant l'existence de la dérivée de $\varphi(x)$ au point x. Cela montre que chaque point de L est un point régulier de $\varphi(x)$ comme il fallait démontrer.

Remarquons enfin que toutes les courbes L considérées par nous partent de l'origine, et l'on peut prendre x assez petit pour que L^x se trouve entièrement à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1); de sorte que dans l'intégrale (4) on peut remplacer $f(x)$ par cette série de Taylor, et, d'après (8), on obtient ainsi les mêmes coefficients c_n quel que soit dans l'intégrale (4) le chemin d'intégration l. C'est-à-dire quel que soit L, il s'agit bien d'une seule fonction analytique $\varphi(x)$ définie par la série (5) et par son prolongement analytique.

3. Appliquons ces généralités à deux cas particuliers très importants pour la suite. Soit d'abord

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1-t)^{1-\alpha}} \qquad (\alpha > 0).$$

A chaque valeur de α correspond une fonction $\varphi(x)$ que nous allons désigner par $R^\alpha f(x)$. Grâce aux développements précédents, nous savons que les fonctions

$$R^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{f(tx)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}} \tag{9}$$

sont toutes holomorphes en chaque point régulier de $f(x)$.

Riemann a établi la formule suivante pour les coefficients c_n

$$c_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)}, \tag{10}$$

où Γ désigne comme d'habitude l'intégrale eulérienne de deuxième espèce.

On peut la vérifier facilement, si l'on remarque que par définition

$$c_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{t^n\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}},$$

et que la fonction $\Gamma(x)$ satisfait à l'égalité

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

On a donc la formule fondamentale

$$(11) \qquad \mathrm{R}^{\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} a_n x^n.$$

En particulier, si α est un entier,

$$c_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\alpha)},$$

de sorte que la fonction

$$x^{\alpha} \mathrm{R}^{\alpha} f(x) = \mathrm{D}^{\alpha} f(x)$$

se forme de $f(x)$ par une intégration répétée α fois. L'opération (9) ou bien les multiplicateurs des coefficients a_n dans la série (11) définissent l'intégration générale de Riemann d'ordre fractionnaire ou incommensurable.

La dérivation ou, si l'on veut, l'intégration d'ordre négatif ($\alpha < 0$) se définit de la manière suivante : Soit k le plus petit entier positif tel que $k + \alpha \geqq 0$. On calcule $\mathrm{R}^{k+\alpha} f(x)$ par la formule (11) par exemple, et l'on pose pour α négatif

$$\mathrm{R}^{\alpha} f(x) = x^k \frac{d^k \mathrm{R}^{k+\alpha} f(x)}{dx^k},$$

et l'on a par définition

$$\mathrm{R}^0 f(x) = f(x).$$

Si $a_0 = 0$, ce qu'on peut toujours supposer, car une constante additive n'influe aucunement sur les singularités de la fonction étudiée, on peut prendre pour $v(t)$ la fonction

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{\alpha - 1} \qquad (\alpha > 0).$$

En ce cas, d'après la formule connue,

$$\int_0^1 t^{x-1} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{y-1} dt = x^{-y} \Gamma(y),$$

on a

$$(12) \qquad c_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1} t^{n-1}\, dt = \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Posons donc pour $\alpha \geqq 0$

$$H^{\alpha} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha}} x^n. \tag{13}$$

Pour $\alpha < 0$ on définit l'opération en question de la manière suivante : On calcule $H^{k+\alpha}$ par la formule (13), puis successivement on différencie et l'on multiplie par x, en répétant k fois cette opération alternée. Ainsi l'opération H^{α} se trouve définie pour α quelconque positif, nul ou négatif par l'unique formule (13), et nous sommes assurés, d'autre part, que cette opération n'introduit jamais des points singuliers nouveaux.

Pour α entier l'opération H^{α} se réduit à une succession alternée de dérivation (ou d'intégration) et de multiplication par x.

D'ailleurs les deux opérations R^{α}, H^{α} ainsi obtenues sont très semblables. Tout d'abord, pour α entier, chacune d'elles se compose de dérivation ou d'intégration, et de multiplication par une puissance entière de x. D'autre part, l'expression asymptotique de la fonction $\Gamma(n)$ nous donne

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} = n^{\alpha}(1+\varepsilon_n),$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

de manière que le rapport des deux sortes de c_n calculées précédemment tend vers 1 pour $n = \infty$.

Remarquons encore que ces deux opérations qui n'introduisent aucun point singulier nouveau, n'en suppriment pas non plus. En effet, d'après le théorème démontré, la fonction

$$H^{-\alpha}[H^{\alpha} f(x)] = f(x)$$

n'a d'autres points singuliers que ceux de la fonction $H^{\alpha} f(x)$.

LA NOTION D'ORDRE.

6. Nous avons construit le mécanisme qui nous permettra d'atténuer la singularité de la fonction dans un point. Mais jusqu'à quel degré doit-on pousser l'opération? Quels seront les caractères

distinctifs du zéro de notre échelle? Il faut choisir ces caractères de façon qu'ils permettent de former une échelle unique pour la mesure des singularités (c'est une condition indispensable de toute définition logique); d'autre part de façon qu'ils se manifestent simplement dans la structure des coefficients, afin que la notion nouvelle puisse nous servir d'instrument utile dans l'étude des fonctions analytiques. M. Hadamard a résolu ce problème très délicat par l'introduction d'une notion relative aux fonctions continues, voisine de celle des fonctions à variation bornée de M. Jordan.

Une fonction réelle ou imaginaire mais continue d'une variable réelle θ sera nommée *à écart fini* dans l'intervalle (a, b) lorsque les intégrales

$$n\int \cos n\theta f(\theta)\,d\theta, \quad n\int \sin n\theta f(\theta)\,d\theta,$$

prises entre des limites quelconques intérieures à l'intervalle (a, b), restent bornées en valeur absolue pour $n = \infty$. La limite supérieure I de leurs modules, finie dans les conditions indiquées, est l'*écart* de la fonction $f(\theta)$ dans (a, b).

Une fonction à variation bornée est toujours à écart fini ([1]). Le second théorème de la moyenne appliqué à l'intégrale

$$n\int \psi(\theta) f(\theta) \cos n\theta\,d\theta,$$

montre immédiatement que, si la fonction continue $\psi(\theta)$ varie toujours dans le même sens, le produit ψf est aussi à écart fini et son écart ne dépasse pas celui de $f(\theta)$ multiplié par $2\,M$, où M est le module maximum de $\psi(\theta)$. Si $\psi(\theta)$ a un nombre fini de maxima et de minima, on remplace 2 par le nombre des extréma.

Si l'on diminue l'intervalle (a, b), l'écart ne peut que s'abaisser ou rester constant. Par conséquent, lorsque l'intervalle tend vers o de façon qu'un point fixe θ_0 se trouve à l'intérieur de chaque intervalle successif, l'écart tend nécessairement vers une valeur bien déterminée. C'est l'écart de la fonction $f(\theta)$ au point θ_0.

Nous définissons maintenant l'ordre de la manière suivante :

([1]) *Voir* J. Hadamard, *Thèse*, p. 65.

Soit x_0 un sommet de l'étoile attachée à la fonction analytique $f(x)$.. Traçons un arc de cercle de centre O passant par ce point. Si la fonction a des points singuliers à l'intérieur du triangle formé par le petit arc de cercle (a, b) et par les deux rayons vecteurs (o, a), (o, b) *quelque petit que soit l'arc* (a, b), nous dirons que l'ordre de la fonction en x_0 est $+\infty$. Dans le cas contraire l'ordre de la fonction *sur l'arc* (a, b) est le nombre ω déterminé par la double condition que, ε étant arbitrairement petit, $H^{\omega+\varepsilon}f(x)$ soit déjà continue et à écart fini sur l'arc considéré et que l'une des deux propriétés manque à la fonction $H^{\omega-\varepsilon}f(x)$. L'ordre de la fonction *au point* x_0 est la limite des ordres sur les arcs successifs contenant tous x_0 à leur intérieur et dont la longueur tend vers o. L'ordre ω peut prendre toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.

Pour que cette définition soit complète, il faut encore démontrer qu'il n'y a qu'un seul nombre ω qui puisse correspondre ainsi à un point singulier. D'après cette définition, en effet, ou bien l'ordre en un point est $+\infty$, et alors il n'y a que ce seul nombre pour marquer l'ordre de ce point, ou bien l'ordre n'est pas infini, c'est-à-dire, il existe au moins un ω tel que $H^{\omega}f(x)$ soit continu et à écart fini sur l'arc comprenant le point singulier en question à son intérieur. Il s'agit de démontrer que, dans ce cas, il n'y a qu'un seul nombre qui satisfasse à la double condition indiquée tout à l'heure.

7. Regardons d'abord le cercle de convergence dont nous pouvons supposer le rayon égal à 1 et établissons deux théorèmes complémentaires.

Si $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ *est convergent et si*

$$\lim_{n=\infty} a_n n \log n = 0,$$

la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est continue et à écart fini sur le cercle de convergence.*

La première hypothèse entraîne immédiatement la conclusion que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

est continue sur le cercle de convergence; en effet la série de Taylor (1) est uniformément convergente à l'intérieur et sur la circonférence du cercle de rayon 1. Reste à montrer que, les conditions remplies, $f(x)$ est à écart fini sur le cercle.

Au lieu de considérer les intégrales

$$n\int_a^b \cos n\theta f(e^{i\theta})\,d\theta, \qquad n\int_a^b \sin n\theta f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

où θ est l'argument d'un point du cercle de convergence, nous pouvons examiner les intégrales

$$n\int_a^b e^{ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta, \qquad n\int_a^b e^{-ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

dont la somme et la différence reproduisent, à un facteur constant près, les intégrales précédentes. Il s'agit de démontrer que les modules de ces expressions ont une limite supérieure finie pour $n=\infty$, les limites d'intégration étant quelconques entre 0 et 2π.

Comme la série (1) converge uniformément sur le cercle, on n'a qu'à la multiplier par $e^{\pm in\theta}$ et intégrer terme à terme; on obtient ainsi

$$n\int_a^b e^{ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n}{m+n} a_m [e^{(m+n)ib} - e^{(m+n)ia}],$$

de sorte que le module de cette intégrale reste inférieure à $2A$ si A désigne la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

D'autre part

$$n\int_a^b e^{-ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n}{m-n} a_m [e^{(m-n)ib} - e^{(m-n)ia}],$$

le terme d'indice $m=n$ étant $na_n(b-a)$. Soient $k<1$ et $K>1$, et pour évaluer sa somme, divisons la série en trois parties. La première contiendra les termes d'indice inférieur à kn. Pour ces termes

$$\left|\frac{n}{m-n}\right| < \frac{1}{1-k},$$

de façon qu'ils donnent une somme inférieure à $\frac{2A}{1-k}$. La seconde partie est formée par les termes d'indice supérieur à Kn. Cette partie fournit une somme inférieure à $\frac{2A}{K-1}$.

Le troisième groupe contient tout ce qui est entre les deux premiers. Le nombre total de ses termes est donc

$$\varepsilon[(K-k)n],$$

où $\varepsilon[x]$ indique la partie entière de x. Soit $|a_r|$ le plus grand des modules des coefficients qui entre dans le troisième groupe. On a évidemment

$$kn \leqq r \leqq Kn. \tag{14}$$

La somme fournie par ce groupe est donc inférieure en valeur absolue à

$$|a-b|\,n\,|a_n| + 4na_r\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\varepsilon[(K-k)n]}\right\},$$

qui, à son tour, est inférieur à

$$|a-b|\,n\,|a_n| + 4\frac{r}{k}a_r\left[\log r+\log\frac{K}{K-k}+c_r\right],$$

où dans le second terme on a éliminé n par les inégalités (14) et où l'on s'est servi de l'équation d'Euler

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\log n = c \text{ (const.)}$$

sous la forme

$$\lim_{n=\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\varepsilon[\rho n]}\right\}-\log n=\log\rho+c,$$

de sorte que $\lim\limits_{r=\infty} c_r = c$. Mais r tend vers l'infini avec n et, d'après nos hypothèses,

$$\lim_{r=\infty} r\,|a_r|\log r = 0.$$

Ce qui montre que la seconde intégrale considérée reste aussi finie pour $n=\infty$, et cela indépendamment des limites d'intégration, comme il fallait le démontrer.

En particulier nous avons obtenu une limite supérieure pour l'écart de la fonction sur le cercle entier

$$I \leqq c_1 A + c_2 \mu,$$

où c_1 et c_2 sont deux nombres positifs, μ est la plus grande valeur de l'expression $m \log m \,.\, a_m$.

Réciproquement, *si la fonction est continue et à écart fini sur le cercle de convergence, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta},$$

où η *est un nombre positif aussi petit qu'on veut, est convergente, et, de plus,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^\eta} n \log n = 0.$$

En effet, d'après la formule de Cauchy,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(x)}{x^{n+1}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta,$$

car, la fonction étant continue sur le cercle de convergence, on peut prendre pour chemin d'intégration ce cercle même. Mais si la fonction est à écart fini, cette intégrale est d'ordre $\frac{1}{n}$, ce qui suffit pour démontrer le théorème réciproque.

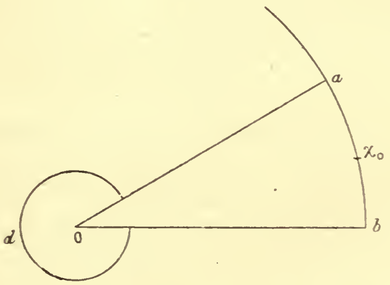
8. Il résulte de ces deux théorèmes que la double condition (*la fonction soit continue et à écart fini sur le cercle de convergence*) ne dépend que de la grandeur des coefficients. Par conséquent, une fois cette condition remplie, l'opération H^α (ou R^α) qui remplace a_n par $\frac{a_n}{n^\alpha}$ ne peut que renforcer cette condition. L'ordre de la fonction sur le cercle entier est donc un nombre bien déterminé, qui peut d'ailleurs prendre même les valeurs $\pm\infty$, et dans sa définition on peut se servir également des opérations H^α ou R^α.

Pour faire voir qu'il en est de même de l'ordre d'un point du cercle de convergence ou plus généralement de l'ordre d'un sommet x_0 de l'étoile, nous allons établir une proposition fondamentale dont nous nous servirons souvent dans la suite.

Envisageons l'arc de cercle (a, b) de centre O et de rayon $|x_0|$ passant par x_0. Par hypothèse, le triangle formé par l'arc (a, b), et par les deux rayons (o, a) et (o, b), ne contient aucun point singulier à son intérieur.

Si $f(x)$ est continue et à écart fini sur l'arc (a, b), on peut remplacer $f(x)$ par la somme des deux fonctions $f_1(x)+f_2(x)$ dont la première $f_1(x)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ et $\mathrm{R}^{\varepsilon} f_1(x)$ [et en même temps $\mathrm{R}^{\varepsilon} f_1(x)$], *est continue et à écart fini sur sa circonférence; $f_2(x)$ est holomorphe sur l'arc (a, b).*

Fig. 2.



La démonstration en est bien simple. En effet, d'après une formule fondamentale de Cauchy, la fonction étant continue sur l'arc (a, b), on peut écrire (*fig.* 2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-x} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{ba} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{adb} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = f_1(x)+f_2(x). \end{aligned}$$

D'autre part $f_1(x)$ est développable en série de Taylor

(15) $$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

car

$$\frac{[f_1^{(n)}(x)]_0}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{ba} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} = b_n,$$

et comme $f(x)$ est à écart fini sur l'arc (b, a), on a

(16) $$|b_n| < \frac{\mathrm{M}}{|x_0|^n n},$$

où M est le module maximum de $f(z)$ sur l'arc (a, b). Le rayon de convergence est donc au moins $|x_0|$.

La fonction $f_2(x)$, la différence de deux fonctions développables, est donc aussi développable autour de l'origine; soit

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

D'autre part, elle est holomorphe sur l'arc (a, b), comme le montre immédiatement sa forme d'intégrale.

Il en résulte, grâce à l'inégalité (16), que les quantités

$$\frac{b_n x_0^n}{n^\varepsilon}$$

satisfont à chacune des deux conditions du théorème du numéro 7 (p. 11), de sorte que $H^\varepsilon f_1(x)$ est à écart fini sur le cercle entier de rayon $|x_0|$. Le théorème est démontré.

Si donc il y a un ω tel que $H^\omega f(x)$ est déjà continue et à écart fini sur l'arc (a, b), toutes les fonctions $H^{\omega+\alpha} f(x)$ $(\alpha > 0)$ le sont aussi. En effet, d'après le théorème précédent, on peut décomposer $H^\omega f(x)$ en deux parties, dont l'une, soit $\varphi_2(x)$, est holomorphe sur l'arc (a, b), d'où l'on conclut qu'il en est de même de $H^\alpha \varphi_2(x) = H^{\omega+\alpha} f_2(x)$; d'autre part, l'autre partie, $\varphi_1(x)$, est telle que $H^\varepsilon \varphi_1(x) = H^{\omega+\varepsilon} f_1(x)$ est continue et à écart fini sur le cercle entier de rayon $|x_0|$, donc $H^{\omega+\alpha} f_1(x)$ l'est aussi.

Il n'y a, par conséquent, qu'un seul nombre qui délimite les nombres ω tels que $H^\omega f(x)$ soit continue et à écart fini sur l'arc (a, b). Notre définition de l'ordre fait donc correspondre à chaque sommet de l'étoile et à chaque point du cercle de convergence un nombre et un seul.

LES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DE L'ORDRE.

9. La notion de l'ordre, du moins dans le domaine restreint considéré, est établie d'une manière complètement rigoureuse. Nous devons montrer maintenant qu'elle est utile. La fonction étudiée étant définie par les coefficients a_n, l'ordre doit être en rapport, aussi peu caché que possible, avec ces coefficients. Le

problème général se pose donc pour nous de déterminer l'ordre de la fonction en chaque point du cercle de convergence, de même qu'en chaque point de l'étoile, et, en particulier, de calculer l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence, et tout cela exclusivement par les coefficients a_n.

La dernière question relative à l'ordre sur le cercle entier se résout immédiatement : *cet ordre* Ω *est lié aux* a_n *par la formule*

$$\Omega = 1 + \limsup_{n=\infty} . \frac{\log |a_n|}{\log n}. \tag{17}$$

En effet, si Ω est déterminé par cette équation, on a pour n assez grand, ε étant arbitrairement petit,

$$|a_n| < n^{\Omega + \frac{\varepsilon}{2} - 1}.$$

Par conséquent, les coefficients de la série de Taylor relative à la fonction $H^{\Omega+\varepsilon} f(x)$ satisfont aux conditions du théorème de la page 11 ; ce qui montre que $H^{\Omega+\varepsilon} f(x)$ est déjà continue et à écart fini sur le cercle de convergence, dont le rayon est supposé égal à 1. D'autre part, il y a une infinité d'indices pour lesquels

$$|a_n| > n^{\Omega - \frac{\varepsilon}{2} - 1},$$

de sorte que les coefficients tayloriens d_n de la fonction $H^{\Omega-\varepsilon} f(x)$ ne satisfont pas à la condition que la série

$$\sum \frac{|d_n|}{n^\eta}$$

soit convergente pour η quelconque (positif). Il suffit de prendre $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ pour s'en convaincre. Il en résulte, grâce au théorème (p. 14), que $H^{\Omega-\varepsilon} f(x)$ ne peut pas être à la fois continue et à écart fini sur le cercle. Ce qui démontre la proposition.

La détermination de l'ordre dans un point du cercle de convergence et dans les sommets de l'étoile, deux problèmes notablement plus compliqués que celui que nous venons de résoudre, nous occupera un peu plus loin quand nous aurons les moyens nécessaires pour y répondre.

Nous pouvons faire cependant quelques remarques simples dont nous nous servirons plus d'une fois dans ce qui suit.

L'ordre d'un point régulier situé sur le cercle de convergence ou à l'intérieur de l'étoile est $-\infty$.

En effet, une fonction est à écart fini dans un intervalle, en chaque point duquel elle a une dérivée inférieure en valeur absolue à un nombre fixe A. On le voit immédiatement par l'égalité

$$\begin{aligned}\int_a^b n\cos n\theta\, f(\theta)\, d\theta &= \int_a^b f(\theta)\, d(\sin n\theta)\\ &= [f(\theta)\sin n\theta]_a^b - \int_a^b f'(\theta)\sin n\theta\, d\theta,\end{aligned}$$

qui montre que l'écart en question est inférieur à

$$|f(b)| + |f(a)| + \mathrm{A}\,|b-a|.$$

Mais les fonctions $\mathrm{H}^\omega f(x)$ satisfont à la condition exigée pour ω quelconque, car elles sont toutes holomorphes sur un petit arc contenant le point x. L'opération ne peut donc pas priver la fonction du caractère d'être continue et à écart fini sur le petit arc considéré, en d'autres termes l'ordre de ce point est $-\infty$.

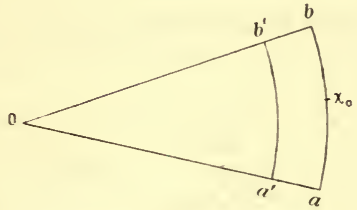
D'après la définition de l'ordre dans un point, si dans un point de l'arc la fonction est d'ordre ω, elle est sur l'arc entier d'ordre au moins égal à ω. Inversement, si la fonction est d'ordre ω sur l'arc entier, elle est d'ordre ω au moins en un point de l'arc, comme on le voit tout de suite en divisant l'arc en parties de plus en plus petites. Ces deux remarques rendent évident le théorème suivant :

L'ordre sur un arc de cercle est le plus grand des ordres pris dans les différents points de cet arc.

10. Un problème, non sans importance, est d'élucider le rapport entre l'ordre et le degré d'infinitude de la fonction en un point singulier, étant donné que ce sont ces deux notions par lesquelles on caractérise généralement l'allure de la fonction. A cet égard, M. Hadamard a donné les deux théorèmes réciproques que nous allons établir.

Regardons un sommet de l'étoile x_0 et son voisinage triangulaire déjà considéré.

Fig. 3.



Si sur l'arc de cercle (a, b), *extrémités comprises, la fonction est d'ordre positif* $\omega_1 < \omega$, *on a uniformément pour les arguments entre* a *et* b

$$\lim_{\rho=|x_0|} (1-\rho)^{\omega} f(\rho e^{i\theta}) = 0$$

et

$$\lim_{\rho=|x_0|} (1-\rho)^{\omega}\, I(\rho) = 0,$$

où $I(\rho)$ est l'écart de la fonction de θ, $f(\rho e^{i\theta})$, sur l'arc de cercle (a', b') de rayon ρ.

Tout d'abord ces égalités sont satisfaites par toute fonction holomorphe sur l'arc (a, b), extrémités comprises. D'autre part, on peut décomposer $f(x)$ en deux parties, dont l'une est holomorphe sur l'arc considéré, l'autre est d'ordre $\omega' = \omega_1 + \varepsilon < \omega$ sur le cercle entier, de rayon $|x_0|$. Il suffit donc d'établir le théorème pour une fonction d'ordre inférieur à ω sur le cercle entier. De plus, pour simplifier l'écriture, on peut supposer que $|x_0| = 1$.

Mais, dans ce cas, la formule fondamentale (17) nous montre que les coefficients tayloriens a_n de notre fonction $f(x)$ satisfont, pour n assez grand, à l'inégalité

$$|a_n| < n^{\omega'-1+\varepsilon},$$

où, ε étant arbitrairement petit, on peut supposer que

$$\omega' - 1 + \varepsilon < \omega - 1,$$

et, comme nous le verrons plus loin, les coefficients binomiaux $B_n^{(\omega)}$ définis par l'équation

$$\frac{1}{(1-x)^{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\omega)} x^n$$

satisfont à la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_n^{(\omega)}}{n^{\omega-1}} = \frac{1}{\Gamma(\omega)}.$$

Appliquons maintenant un théorème bien connu de Cesàro d'après lequel, les b_n étant positifs,

$$\lim_{\rho=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

si la dernière limite existe. Nous aurons

$$\lim_{\rho=1} (1-\rho)^{\omega} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\theta} \right| \leqq \lim_{\rho=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n}{\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\omega)} \rho^n} = \lim_{n=\infty} \frac{|a_n|}{B_n^{(\omega)}} = 0,$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Pour en démontrer la seconde, rappelons que, d'après le numéro 7, ρ étant fixé,

$$I(\rho) \leqq c_1 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n + c_2 (\text{max. de } |a_n| \rho^n n \log n).$$

Nous avons vu que

$$\lim_{\rho=1} (1-\rho)^{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n = 0;$$

d'autre part, dans le second terme du second membre, on peut négliger un nombre fini de termes, par exemple ceux dans lesquels les modules des a_n sont plus grands que $\frac{n^{\omega'-1}}{\log n}$. En remplaçant ρ par $1-\eta$, il suffit donc de considérer le maximum de

$$(1-\eta)^n n^{\omega'} \eta^{\omega},$$

quand η est fixé, et chercher la limite de ce maximum pour $\eta = 0$.

Mais on voit tout de suite que cette expression ne croît que pour

$$n \leqq \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{\frac{1}{\omega'}}-1} = k\,\frac{\omega'}{\eta},$$

où

$$\lim_{\eta=0} k = 1.$$

Pour le voir, il suffit d'écrire que l'expression considérée s'accroît par le changement de n en $n+1$. Si l'on remarque enfin que

$$\lim_{\eta=0} (1-\eta)^{k\frac{\omega'}{\eta}} = e^{-\omega'},$$

et que

$$\lim_{\eta=0} \left(\frac{k\omega'}{\eta}\right)^{\omega'} \eta^{\omega} = (\omega')^{\omega'} \lim_{\eta=0} k^{\omega'} \lim_{\eta=0} \eta^{\omega-\omega'} = 0,$$

la seconde partie de l'énoncé se trouve démontrée aussi.

11. Réciproquement, *si l'on a pour* θ *quelconque entre* a *et* b

$$\limsup_{\rho=1} |(1-\rho)^{\omega} f(\rho e^{i\theta})| < A$$

et

$$\limsup_{\rho=1} (1-\rho)^{\omega}\, I(\rho) < A,$$

l'ordre de la fonction sur l'arc (a, b) *est au plus égal à* ω.

Prenons, en effet, un nombre $\omega'' > \omega$ et regardons l'expression

$$R^{\omega''} f(e^{i\theta}) = \frac{1}{\Gamma(\omega'')} \int_0^1 (1-t)^{\omega''-1} f(te^{i\theta})\, dt.$$

Pour montrer qu'elle a un sens, écrivons-la sous forme d'une série

$$\int_0^1 (1-t)^{\omega''-1} f(te^{i\theta})\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\omega''-1} f(te^{i\theta})\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} + \ldots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n+1}} + \ldots,$$

dont chaque terme est une fonction continue de θ, et faisons voir que le reste

$$R_n = \int_{\frac{n}{n+1}}^{1} (1-t)^{\omega''} f(te^{i\theta})\, dt$$

tend vers zéro d'une manière uniforme si n croît indéfiniment. Mais, d'après nos hypothèses, on a

$$|R_n| < \int_{\frac{n}{n+1}}^{1} \frac{(1-t)^{\omega''-1}}{(1-t)^{\omega}}\, dt = \frac{1}{\omega''-\omega}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\omega''-\omega},$$

indépendamment de θ. Notre série est donc uniformément convergente et la fonction $R^{\omega''} f(e^{i\theta})$ est continue sur l'arc (a, b).

Montrons encore qu'elle y est à écart fini. Nous avons à considérer les expressions

$$\frac{n}{\Gamma(\omega'')} \int_a^b e^{\pm ni\theta}\, d\theta \int_0^1 (1-t)^{\omega''-1} f(te^{i\theta})\, dt.$$

D'après les remarques précédentes, nos hypothèses nous permettent de renverser l'ordre des deux intégrations, de sorte que nous avons à évaluer les expressions

$$\frac{1}{\Gamma(\omega'')} \int_0^1 (1-t)^{\omega''-1}\, dt \int_a^b n e^{\pm in\theta} f(te^{i\theta})\, d\theta.$$

La seconde intégrale est justement l'écart de la fonction $f(x)$, donc elle est moindre que $\frac{A}{(1-t)^{\omega}}$, ce qui donne la limite supérieure finie

$$\frac{A}{\Gamma(\omega'')(\omega''-\omega)}.$$

Par conséquent $R^{\omega''} f(x)$ est continu et à écart fini sur l'arc (a, b) si ω'' dépasse aussi peu qu'on le veut le nombre ω. En d'autres termes l'ordre cherché ne dépasse pas ω. Ce qu'il fallait démontrer.

Tirons les conséquences immédiates de ces deux théorèmes pour pouvoir déterminer rapidement l'ordre dans les cas les plus usuels.

Si l'ordre de $f(x)$ sur l'arc (a, b) est ω, celui de $f(x)\psi(x)$, où $\psi(x)$ est holomorphe en chaque point de l'arc considéré, est *au plus ω; en particulier, si $\psi(x)$ ne s'annule pas sur (a, b), l'ordre de produit est précisément ω.*

Si ω est positif, la première moitié de l'énoncé résulte immédiatement du fait que le produit $(1-\rho)^{\omega+\varepsilon}f(\rho e^{i\theta})\psi(\rho e^{i\theta})$ est borné pour $\rho = 1$ et que, comme nous l'avons vu (n° 6), une limite supérieure de l'écart du produit est celle de l'écart de $f(x)$ multipliée par le maximum de $|\psi(x)|$ et par le nombre fini des extréma des parties réelles et imaginaires de ψ dans l'intervalle. Le même raisonnement nous montre que, si ω est négatif ou nul, l'ordre du produit n'est pas un nombre positif.

Plus précisément, soit $f(x)$ de l'ordre $-k$ sur l'arc (a, b), et soit e la partie entière de $k+1$ si k n'est pas un entier, et soit $e = k$ dans l'autre cas. La dérivée $e^{\text{ième}}$ de $f(x)\psi(x)$ se compose de termes de la forme $c\mathrm{D}^{e-r}f\mathrm{D}^r\psi$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, e)$, où $\mathrm{D}^r\psi$ est une fonction holomorphe sur l'arc considéré et l'ordre de $\mathrm{D}^{e-r}f$ est, par définition, celui de $f(x)$ augmenté de $e-r$. Mais si $r \neq 0$, on a

$$-k+e-r<0,$$

de sorte que, d'après la remarque de tout à l'heure, les termes correspondants sont d'ordre négatif. Enfin, le terme $c\psi\mathrm{D}^e f$ est le produit d'une fonction d'ordre positif $-k+e$ et d'une fonction holomorphe, donc son ordre est au plus $-k+e$. En résumé, l'ordre de la fonction $\mathrm{D}^e(f\psi)$ est inférieur ou égal à $-k+e$, ce qui montre que celui de $f\psi$ est inférieur ou égal à

$$-k+e-e=-k,$$

comme il fallait le démontrer.

Supposons maintenant que la fonction holomorphe $\psi(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle considéré. Si l'ordre ω' de $f\psi$ était inférieur à l'ordre ω de $f(x)$ (on a vu qu'il ne pouvait le dépasser), $\frac{1}{\psi}$ étant holomorphe, l'ordre de $f\psi\frac{1}{\psi}=f$ serait inférieur ou égal à $\omega'<\omega$, ce qui est manifestement absurde. Le théorème énoncé est donc démontré dans toute son étendue.

12. Ces résultats établis, déterminons l'ordre dans des cas simples, mais importants pour l'application. Regardons tout

d'abord la fonction

$$(1-x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} x^n.$$

Si r est un entier positif ou nul, la fonction est un polynome, donc son ordre est partout $-\infty$. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi. Nous allons démontrer qu'au point 1 son ordre est $-r$. Remarquons pour cela que k étant la partie entière de r et $A = (-1)^{k+1} r(r-1)\ldots(r-k)$, on a, à partir de $n = k+1$,

$$\begin{aligned} B_n^{(-r)} &= (-1)^n \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} \\ &= A \frac{(n-1-r)\ldots(k+1-r)}{n!} = A \frac{\Gamma(n-r)}{\Gamma(k+1-r)\Gamma(n+1)}, \end{aligned}$$

grâce à la propriété caractéristique de la fonction eulérienne $\Gamma(x)$:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

Mais la formule classique de Stirling, d'après laquelle

$$\Gamma(n) = \eta(n) n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n},$$
$$\lim_{n=\infty} \eta(n) = \sqrt{2\pi},$$

nous montre que

$$\frac{\Gamma(n-r)}{\Gamma(n+1)} = n^{-r-1}(1+\varepsilon_n)$$

avec

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On calcule maintenant l'ordre par la formule (17) :

$$\Omega = 1 + \lim_{n=\infty} \frac{\log \dfrac{A}{\Gamma(k+1-r)} + (-r-1)\log n + \log(1+\varepsilon_n)}{\log n} = -r.$$

L'ordre de la fonction envisagée sur son cercle de convergence est donc bien égal à $-r$; mais le seul point singulier est le point 1; par conséquent, c'est son ordre qui est donné par Ω.

Posons, pour r négatif, $\rho = |r|$; les coefficients $B_n^{(-r)}$ s'écrivent

$$(18) \qquad B_n^{(\rho)} = \frac{(n-1+\rho)\ldots\rho}{n!} = \frac{\Gamma(n+\rho)}{\Gamma(\rho)\Gamma(n+1)} = \frac{n^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}(1+\varepsilon_n).$$

Regardons encore la fonction $(1-x)^r \log^q(1-x)$, ou plus généralement

$$(1-x)^r \mathrm{P}_q[\log(1-x)],$$

où $\mathrm{P}_q(x)$ est un polynome de degré q en x. Son ordre au point 1 est $-r$ comme le montrent facilement les théorèmes des numéros **10** et **11**. En effet, les expressions $(1-\rho)^\omega f(\rho e^{i\theta})$ et $(1-\rho)^\omega \mathrm{I}(\rho)$ relatives à la fonction $(1-x)^r$ seront multipliées par $\log(1-\rho)$, dont le produit par $(1-\rho)^\varepsilon$ tend vers zéro, quelque petit que soit ε. Pour r négatif, les deux théorèmes sont applicables, il est donc évident que l'ordre reste $-r$.

Si r est positif, on choisit un entier $e > r$ et l'on calcule la dérivée d'ordre e de la fonction envisagée. On obtient une expression de la forme $(1-x)^{r-e}$, multipliée par un polynome en $\log(1-x)$. Cette expression rentre dans la forme étudiée tout à l'heure, son ordre est donc $-r+e$. Il résulte donc de la définition de l'ordre que celui de $(1-x)^r \log^q(1-x)$ est $-r$.

ORDRE ET DEGRÉ D'INFINITUDE.

13. Dans les exemples précédents, l'ordre et ce qu'on appelle d'habitude le *degré d'infinitude* sont représentés par le même nombre. Il n'est pas inutile, peut-être, de remarquer dès maintenant que ces deux nombres fondamentaux relatifs aux singularités sont en général bien distincts. D'abord, tandis que nous avons défini l'ordre sans aucune ambiguïté pour chaque sommet de l'étoile, et en particulier pour chaque point x_0 du cercle de convergence, le degré d'infinitude n'a pas toujours un sens aussi précis.

Soit donné un chemin quelconque aboutissant à x_0, dans chaque point duquel, x_0 excepté, la fonction soit holomorphe. Ordinairement, on entend par le degré d'infinitude de la fonction, le long de ce chemin, le plus petit nombre r tel que

$$\lim_{x=x_0} (x-x_0)^r f(x) = 0,$$

ou bien le plus grand nombre s tel que

$$\limsup_{x=x_0} |(x-x_0)^s f(x)| = \infty,$$

les limites étant prises en suivant le chemin donné.

Faisons à cet égard la remarque suivante. Soit x_0 le point limite de la suite x_k, $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$ située, pour plus de simplicité, sur le cercle de convergence. Si la fonction devient infinie en chaque point x_k le long du rayon qui y aboutit, on peut désigner un chemin pour lequel le degré d'infinitude en x_0 soit aussi grand qu'on veut, même si la fonction reste bornée en x_0 le long d'une courbe quelconque ne touchant pas la circonférence. En effet, r étant donné arbitrairement, nous pouvons aller assez près de x_k sur le rayon $(0, x_k)$, pour que dans ce point x'_k on ait

$$|(x_0 - x'_k)^r f(x'_k)| > A_k,$$

où A_k est un nombre positif quelconque. Choisissons A_k de façon que $\lim\limits_{k=\infty} A_k = \infty$; on voit que sur la ligne brisée $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, \ldots)$ le degré d'infinitude est au moins r.

On écarte l'effet des singularités voisines, en excluant les chemins tangents au cercle et en prenant pour degré d'infinitude le plus grand degré le long des courbes ainsi admises.

Afin de montrer la divergence des deux notions ainsi précisées, M. Borel (¹) a donné un exemple où l'ordre dépasse de beaucoup le degré d'infinitude. Voici une remarque bien simple qui fait voir la cause de cette divergence.

Soit une série convergente à termes positifs c_n. On peut toujours remplacer une infinité de c_n par $\frac{1}{\log n}$ de telle façon que la convergence n'en soit pas troublée, par exemple les termes d'indice n^{n^2}. Soit c'_n la suite nouvelle des coefficients ainsi obtenue, et regardons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^n.$$

Son rayon de convergence est l'unité, et son ordre sur le cercle de convergence est aussi égal à 1, car

$$1 + \lim_{n=\infty} \frac{\log \frac{1}{\log n}}{\log n} = 1 - \lim_{n=\infty} \frac{\log \log n}{\log n} = 1.$$

(¹) E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 77. Paris, Gauthier-Villars; 1902.

D'autre part, son degré d'infinitude est o; en effet son développement taylorien converge absolument dans tous les points du cercle, de sorte que $|\varphi(x)|$ a une limite supérieure finie sur le cercle.

14. Dans cet exemple, comme dans celui de M. Borel, les coefficients sont à croissance très irrégulière. On pourrait donc croire que c'est cette irrégularité qui est la cause exclusive de la divergence observée. Pour faire voir qu'il n'en est pas nécessairement ainsi, considérons la fonction

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\varepsilon(\sqrt{n})} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

où $\varepsilon(x)$ est la partie entière de x.

Les modules des coefficients, égaux à l'unité, sont évidemment à croissance régulière, et l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence de rayon 1 est l'unité. Envisageons, d'autre part, le degré d'infinitude. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$s_n(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \ldots + \alpha_n x_0^n.$$

On voit facilement que

$$\limsup_{n=\infty} \left| \frac{s_n(1)}{\sqrt{n}} \right| = 1.$$

Nous allons montrer que, pour un point quelconque $x_0 \neq 1$ du cercle de convergence,

$$\limsup_{n=\infty} \left| \frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}} \right| = A, \tag{19}$$

où A est un nombre fini qui dépend d'ailleurs de x_0. Remarquons, à cet effet, que, si l'on pose

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sigma_n,$$

on a identiquement

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k \quad \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (q_k - q_{k+1}) + \sigma_n q_n.$$

Dans le cas actuel

$$q_k = \alpha_k, \qquad p_k = x_0^k,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_0^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (x_0 + x_0^2 + \ldots + x_0^k)(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (x_0 + x_0^2 + \ldots + x_0^n)\alpha_n, \end{aligned}$$

et ainsi

$$s_n(x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0} \left[\sum_{k=1}^{n-1} (1 - x_0^k)(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (1 - x_0^n)\alpha_n \right].$$

Considérons maintenant le rapport

$$\frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}}.$$

On voit, d'une part, que

$$\lim_{n=\infty} (1 - x_0^n) \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} = 0,$$

et, pour les indices k qui ne sont pas de forme $r^2 - 1$, on a

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = 0.$$

D'autre part, lorsque $k = r^2 - 1$, nous avons $|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = 2$, et, dans la somme, on a des termes de cette sorte en nombre $\sqrt{n}$, ce qui démontre l'égalité (19).

Pour en tirer la conclusion cherchée, écrivons que

$$\frac{\psi(xx_0)}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) x^n;$$

donc, pour toutes les valeurs de x inférieures à 1,

$$\left| \frac{\psi(xx_0)}{1 - x} \right| < \mathrm{B} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, x^n,$$

où B est la plus grande valeur du rapport $\left| \dfrac{s_n(x_0)}{\sqrt{n+1}} \right|$.

Mais le théorème de Cesàro nous donne

$$\lim_{x=1}(1-|x|)^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\,|x|^n=\lim_{x=1}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\,|x|^n}{\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{\left(\frac{3}{2}\right)}|x|^n}=\lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{B_n^{\left(\frac{3}{2}\right)}}=\mathrm{C}\ (\text{fini}),$$

d'où le résultat

$$\left|(1-x)^{\frac{1}{2}}\psi(xx_0)\right|\mathrm{BC}'\left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{\frac{3}{2}}\leqq\frac{\mathrm{BC}'}{\cos\alpha}$$

où C′ est la plus grande valeur du rapport dont la limite est C; α est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, les chemins tangents au cercle étant exclus.

Le degré d'infinitude de $\psi(x)$ ne surpasse donc pas $\frac{1}{2}$, tandis que son ordre est égal à 1. Mais ce qui est encore à remarquer, c'est le fait que la série formée par les modules des coefficients est

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

dont le degré d'infinitude sur le cercle de convergence est manifestement égal à 1. Donc les modules des coefficients ne déterminent pas complètement l'ordre de grandeur de la fonction sur le cercle de convergence, les arguments des coefficients entrent aussi en jeu. Il en ressort nettement que l'*influence des arguments* des coefficients sur l'allure de la fonction sur le cercle de convergence est beaucoup plus profonde qu'on aurait pu le croire. Le problème nouveau et général se pose donc : *Déterminer les bornes et les caractères de l'influence des arguments sur les propriétés générales de la fonction.*

15. Sans avoir l'intention d'aborder l'étude de ce problème, nous allons développer une remarque générale pour donner une idée assez exacte de l'influence des arguments. A cet effet voici un lemme qui nous paraît avoir un intérêt indépendamment de l'application que nous allons en faire.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les points limites de la suite infinie

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots.$$

Entourons les points α_i de cercles assez petits pour qu'ils soient extérieurs les uns aux autres ; les termes extérieurs à tous ces cercles sont par hypothèse en nombre fini. Soit enfin $m_i(n)$ le nombre des termes d'indice inférieur ou égal à n qui se trouvent dans le cercle c_i, et formons les rapports $\frac{m_i(n)}{n}$.

Si la limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_i(n)}{n} = f_i$$

existe, nous dirons que *la fréquence* du point α_i est f_i.

Démontrons que dans ce cas

$$\lim_{x=1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + \ldots + f_k \alpha_k, \tag{20}$$

du moins le long du rayon $(0, 1)$ [1].

D'abord on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha_1 \sum_{n_1} x^{n_1} + \alpha_2 \sum_{n_2} x^{n_2} + \ldots + \alpha_k \sum_{n_k} x^{n_k} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n$$

avec

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Mais, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{x=1} (1-x) \sum_{n_i} x^{n_i} = \frac{\sum_{n_i} x^{n_i}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \lim_{n=\infty} \frac{m_i(n)}{n} = f_i$$

et

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

d'où il résulte (20).

---

(1) Le même résultat subsiste pour tous les chemins non tangents au cercle, comme on peut le voir par une légère modification de la démonstration donnée dans le texte.

En raisonnant ainsi sur la fonction

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

on obtient la relation

$$\lim_{x=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + \ldots + f_k \sigma_k,$$

où f_i est la fréquence du point limite σ_i par rapport à la suite des s_n. C'est une généralisation immédiate du théorème d'Abel d'après lequel, s'il n'y a qu'un seul point limite σ, la fonction tend vers cette valeur pour $x = 1$ (¹).

Examinons maintenant la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n$$

et, pour écarter l'influence des modules des coefficients, supposons que

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = A.$$

Il est évident que la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n$$

devient infinie de degré 1 au point 1. Quelle distribution des $e^{i\alpha_n}$ abaisse le degré d'infinitude de la fonction examinée ? Nous allons montrer que, *si la distribution des* $e^{i\alpha_n}$ *sur le cercle de rayon* 1 *est uniforme,* $f(x)$ *ne devient pas infinie de degré* 1 *au point* 1.

La distribution des $e^{i\alpha_n}$ est dite *uniforme* lorsque, divisant le cercle en k arcs égaux, la fréquence des $e^{i\alpha_n}$ sur un arc existe et est égale à $\frac{1}{k}$ et cela pour une infinité de valeurs de k.

Il suffit de démontrer la proposition pour la fonction

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\alpha_n} x^n,$$

(¹) *Voir* encore à ce sujet P. Dienes, *Essai sur les singularités des fonctions analytiques* (*Journal de Mathématiques*, 1909, p. 344).

car, d'après l'hypothèse

$$f(x) = \mathrm{A} f_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{i\alpha_n} x^n$$

avec

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

et selon le théorème déjà cité de Cesàro

$$\lim_{x=1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{i\alpha_n} x^n = 0.$$

Formons les fonctions

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(k)} x^n,$$

en prenant, au lieu de α_n, le milieu $\beta_n^{(k)}$ de l'arc qui le contient. La relation (20) nous donne

$$\lim_{x=1} (1-x) \varphi_k(x) = e^{i\frac{\pi}{k}} \sum c_k = 0,$$

où Σc_k est la somme des $k^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité.

Mais

$$f_1(x) = \varphi_k(x) + \varepsilon_k(x),$$

et, quelque petit que soit ε, tous les coefficients de $\varepsilon_k(x)$ sont inférieurs à $\frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain indice k. Par conséquent, pour k assez grand,

$$|(1-x) f_1(x)| < |(1-x) \varphi_k(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, si x est assez proche de l'unité,

$$|(1-x) \varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où il résulte que

$$|(1-x) f_1(x)| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

CHAPITRE II.

L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE.

1. Les généralités du premier Chapitre établies, nous pouvons aborder l'étude systématique du problème des singularités qui consiste pour nous à chercher en un point singulier des relations entre la fonction et sa représentation. Plus particulièrement, nous allons étudier dans ce Chapitre la relation entre l'allure de la fonction et celle de la série de Taylor sur le cercle de convergence.

On sait qu'une série de Taylor peut converger ou ne pas converger dans un point du cercle de convergence. Dans le premier cas, un célèbre théorème d'Abel nous assure que la série représente la valeur limite de la fonction qu'on obtient en s'acheminant vers ce point à l'intérieur du cercle sur une courbe quelconque ne touchant pas ce cercle. L'existence même de cette limite est une conséquence de la convergence. Dans le second cas, qui est le plus général, on ne peut rien conclure sur l'allure de la fonction au voisinage du point considéré : la fonction peut y être holomorphe ou simplement continue, indéterminée, infinie, etc. Le problème se pose donc d'une part de chercher les conditions de la convergence d'une série de Taylor sur son cercle de convergence, et ce serait en quelque sorte l'inversion du théorème d'Abel; d'autre part, d'établir des méthodes qui, partant de la série divergente, nous donnent le moyen de conclure sur l'allure de la fonction à ce point.

Pour ne pas amonceler les difficultés, nous étudierons toutes ces questions sur trois étapes successives. Nous supposerons d'abord que les coefficients tendent vers o, puis qu'ils sont à croissance finie et finalement qu'ils sont quelconques. Pour simplifier l'écriture, le rayon de convergence sera supposé réduit à l'unité dans tout le Chapitre.

LA SOMMATION DE LA SÉRIE DE TAYLOR SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE.

2. Le premier résultat dans l'étude de la convergence sur le cercle est dû à M. Hadamard. Supposons avec lui que les coefficients tendent vers o au moins comme $n^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire supposons que l'ordre sur le cercle de convergence soit < 1 et regardons un point régulier de cette circonférence. Le théorème de M. Hadamard établit que, *sous la condition indiquée, la série de Taylor converge nécessairement dans un tel point.*

Pour plus de simplicité, soit 1 ce point. On a

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)x^n. \tag{1}$$

D'autre part, par hypothèse,

$$f(x) = f(1) + A_1(1-x) + A_2(1-x)^2 + \ldots,$$

de façon que

$$\frac{f(x)}{1-x} = \frac{f(1)}{1-x} + A_1 + A_2(1-x) + \ldots. \tag{2}$$

Mais nous avons vu dans le Chapitre précédent (nº 11) que la multiplication par $\frac{1}{1-x}$ ne change pas l'ordre de la fonction

$$A_1(1-x) + A_2(1-x)^2 + \ldots$$

dans aucun point du cercle, sinon en 1 où elle reste holomorphe. La fonction $A_1 + A_2(1-x) + \ldots$ est donc d'ordre inférieur à 1 sur le cercle; par suite, les coefficients c_n de son développement autour de l'origine tendent vers o. La comparaison de (1) et de (2) nous montre cependant que

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = f(1) + c_n,$$

ce qui démontre la proposition.

M. Fatou [1] a remarqué que le même résultat subsiste, c'est-à-

[1] Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. XXX, p. 389).

dire *la série converge en chaque point régulier du cercle de convergence*, même si l'on ne précise pas du tout la façon dont les coefficients tendent vers o. La démonstration s'appuie sur le théorème célèbre de Riemann que voici :

Soit donnée une série trigonométrique quelconque

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n,$$

et supposons que $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$.

La différence entre la somme $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n$ *et l'intégrale*

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_b^c \mathrm{F}(t)\,\rho(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\dfrac{\theta-t}{2}}\right)^2 dt,$$

où

$$\mathrm{F}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nt + b_n \cos nt}{n^2},$$

et où (b, c) *est un intervalle arbitrairement petit contenant le point* $t = \theta$ *à son intérieur, tend vers* o *avec* $\frac{1}{n}$ *si l'on choisit pour* $\rho(t)$ *une fonction continue en* (b, c) *ainsi que ses cinq premières dérivées satisfaisant aux conditions*

$$\rho(b) = \rho(c) = \rho'(b) = \rho'(c) = 0,$$
$$\rho(\theta) = 1, \qquad \rho'(\theta) = \rho''(\theta) = \rho'''(\theta) = \rho^{\mathrm{iv}}(\theta) = 0,$$

$\rho''(t)$ *n'ayant qu'un nombre fini d'extréma dans l'intervalle* (b, c) (1).

Il suffit donc de démontrer que l'intégrale (3) de Riemann tend pour $n = \infty$ vers une valeur bien déterminée. Voici le raisonnement de M. Fatou. Nous avons vu dans le Chapitre précédent (n° 5) que

(1) Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* (*Werke*, p. 256). Pour ne pas interrompre la marche d'idée que nous suivons, nous avons mis la démonstration du célèbre théorème à la fin du Volume sous forme d'une Note.

les deux fonctions

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} x^n$$

ont les mêmes singularités. Par conséquent la seconde, comme la première, est holomorphe au point $x = e^{i\theta}$. Il en résulte que

$$F(t) = -[H^{(2)} f(x)]_{x=e^{it}} = F_1(t) + i F_2(t)$$

est une fonction holomorphe de t sur un petit arc entourant le point $t = \theta$.

D'autre part, deux intégrations par partie appliquées séparément à $F_1(t)$, à $F_2(t)$, donnent, grâce aux conditions limites imposées à $\rho(x)$,

$$(4) \qquad \int_b^c F(t)\rho(t) \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta - t)}{\sin\frac{\theta - t}{2}}\right) dt$$

$$= \int_b^c [F(t)\rho(t)]'' \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta - t)}{\sin\frac{\theta - t}{2}} dt$$

et la partie réelle et la partie imaginaire de $[F(t)\rho(t)]''$ satisfont également aux conditions de Dirichlet, leur valeur en θ étant $F_1''(\theta)$ respectivement $F_2''(\theta)$, de sorte que, d'après le théorème classique sur l'intégrale de Dirichlet [1], l'intégrale considérée tend pour $n = \infty$ vers la valeur $F''(\theta)$, ce qui démontre le théorème de M. Fatou.

Notre série de Taylor converge donc en chaque point régulier du cercle. Mais, en réalité, la convergence n'est pas restreinte à ces points : la série peut converger aussi dans des points singuliers. Par exemple :

3. *Si les coefficients tendent vers* o, *la série de Taylor converge en chaque point x_0 d'ordre négatif du cercle de convergence* (dont le rayon est supposé égal à 1).

En effet, d'après le théorème de M. Hadamard sur la séparation

(1) *Voir* par exemple JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 233.

des singularités (p. 15), si $f(x)$ est d'ordre $\omega < 0$ en x_0, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où la fonction $\Sigma b_n x^n$ est d'ordre $\omega + \varepsilon$ sur le cercle entier et la fonction $\Sigma c_n x^n$ est holomorphe en x_0. ε étant arbitraire, on le choisit de façon que $\omega + \varepsilon < 0$ et l'on en conclut que

$$|b_n| < n^{-1-\varepsilon'} \qquad (\varepsilon' > 0),$$

de sorte que la première série est absolument convergente sur le cercle entier, en particulier en x_0.

D'autre part, comme b_n tend vers 0 pour $n = \infty$, il en est de même de $c_n = a_n - b_n$. On peut donc appliquer à la seconde série le théorème de M. Fatou, et l'on voit ainsi que la seconde série converge en x_0, ce qui démontre la proposition.

Mais on peut aller encore plus loin. En effet, *pour que la série dont les coefficients tendent vers* 0 *soit convergente en* x_0, *il suffit de supposer que* $f(x)$ *soit continue et à variation bornée* (¹) *sur un petit arc de cercle* (α, β) *entourant le point* x_0, *sans supposer l'existence d'une fonction limite dans les autres points du cercle* (²).

La continuité en x_0 n'entraîne pas, en général, la convergence de la série à ce point. En partant en effet de la série de Fourier divergente d'une fonction continue, on peut construire une série de Taylor divergente dont les coefficients tendent vers 0 et qui a cependant une fonction limite continue. Pour assurer la convergence, il faut donc ajouter à l'hypothèse de la continuité une condition supplémentaire.

Voici la marche du raisonnement qui nous conduit au théorème énoncé. On démontre d'abord sans peine que, la fonction limite $f(e^{i\theta})$ étant supposée continue et à variation bornée dans l'intervalle (α, β), il en est de même des fonctions

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx = \int_0^\alpha \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx + i \int_\alpha^\theta [f(e^{i\theta}) - a_0]\, d\theta$$

(¹) JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. I, p. 54.

(²) P. DIENES, *Sur la sommabilité de la série de Taylor* (*Comptes rendus*, 1911, t. CLIII, p. 802).

et

$$\int_0^x \frac{f_1(x)}{x}\,dx = \int_0^\alpha \frac{f_1(x)}{x}\,dx + i\int_\alpha^0 f_1(e^{i\theta})\,d\theta$$

représentées à l'intérieur du cercle comme fonctions de $x = re^{i\theta}$ par les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} x^n$$

dont la seconde est convergente aussi sur la circonférence et représente ainsi la seconde fonction pour ces valeurs de la variable. On en conclut que $F(t)$, $F'(t)$ et $F''(t)$ sont continus et à variation bornée dans (α, β). Et comme, par hypothèse, ρ, ρ' et ρ'' sont aussi continues et à variation bornée, il en est de même de $[F(t)\rho(t)]''$ de sorte que, d'après le théorème classique de l'intégrale de Dirichlet, le second membre de (4) tend vers une valeur bien déterminée ; le théorème de Riemann nous assure donc de la convergence. Ce qui démontre la proposition.

4. La fonction étant supposée à variation bornée en x_0, on aurait le même résultat si $f(x)$, c'est-à-dire sa partie réelle et sa partie imaginaire, avait en x_0 une discontinuité de la première espèce. On pourrait remplacer de même l'hypothèse que la fonction soit à variation bornée par des conditions plus générales sans que le théorème cessât d'être vrai. Mais au lieu des considérations de ce genre, qui cependant ne manquent pas d'intérêt, nous allons établir un théorème plus simple et plus général, en nous servant, à l'exemple de M. Fejér [1], des moyennes arithmétiques des s_n [2]. Supposons que les coefficients tendent vers o.

Si, pour chaque chemin à l'intérieur du cercle de convergence aboutissant à x_0,

$$\lim_{x=x_0} f(x) = A,$$

on a nécessairement

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1(x_0) + \ldots + s_n(x_0)}{n+1} = A.$$

(1) L. Fejér, *Ueber die Fourierschen Reihen* (*Math. Annalen*, t. LVIII).
(2) *Voir* la note citée précédemment.

Pour le démontrer, nous allons généraliser le théorème fondamental de Riemann de la façon suivante :

La différence entre $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ et l'intégrale (3) tend vers o pour $n = \infty$, les moyennes arithmétiques de la différence tendent donc également vers o. Mais les moyennes arithmétiques de cette différence sont identiques à la différence des moyennes arithmétiques des deux membres, et l'on voit facilement qu'on peut intervertir de même la formation des moyennes arithmétiques et l'intégration en question. On arrive ainsi au résultat remarquable que *la différence entre*

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n},$$

où

$$s_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$

et l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi n}\int_b^c F(t)\,\varphi(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta - t}{2}}{\sin\frac{\theta - t}{2}}\right)^2 dt$$

tend vers o *pour* $n = \infty$.

S'il s'agit d'une série de Taylor, il faut prendre pour $F(t)$ la fonction

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} e^{int} = F_1(t) + i\,F_2(t)$$

ou plus précisément deux intégrales de l'espèce indiquée formées respectivement par les deux fonctions $F_1(t)$ et $F_2(t)$.

Il suffit donc de démontrer que dans les conditions indiquées cette intégrale I tend vers une limite bien déterminée pour $n = \infty$. Cette démonstration sera basée sur le lemme fondamental que voici :

Si, pour chaque chemin à l'intérieur du cercle de convergence aboutissant à x_0,

$$\limsup_{x = x_0} |f(x)| \leqq M, \tag{5}$$

il y a tout un arc (α, β) *comprenant* x_0 *à son intérieur tel que quand on s'approche à l'intérieur du cercle d'un point quel-*

conque de l'arc (α, β), 1°

$$\limsup |f(x)| \leqq M + \eta \qquad (\eta > 0);$$

2° *la fonction*

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx$$

tend vers une limite bien déterminée et la fonction-limite ainsi définie est continue et à nombres dérivés bornés.

La première partie de la proposition se démontre très facilement. En effet, si η étant donné il n'y avait pas un arc de la nature indiquée, il y aurait toute une suite de points x_ν du cercle de convergence tendant vers x_0, tels que, au voisinage de x_ν la limite supérieure de $|f(x)|$ dépasserait $M + \eta$. Mais on pourrait déterminer alors, *à l'intérieur du cercle*, un point x'_ν près de x_ν de façon que $|f(x'_\nu)| > M + \eta$. On pourrait donc construire par les points x'_ν un chemin pour lequel (5) ne serait pas satisfait.

Pour démontrer la seconde partie, regardons la fonction

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx,$$

le chemin d'intégration étant une courbe rectifiable quelconque à l'intérieur du cercle de convergence. Cette fonction est définie tout d'abord pour les points x à l'intérieur du cercle de convergence. Soit maintenant x un point de l'arc (α, β). Les parties réelles et imaginaires de $\frac{f(x) - a_0}{x}$ sont des fonctions bornées n'ayant qu'un seul point singulier sur la ligne rectifiable aboutissant à x; elles sont donc intégrables.

D'autre part on voit facilement que, pour une autre courbe aboutissant au même $x = x_0$, l'intégrale a la même valeur. En effet, a et b étant deux points quelconques des deux courbes,

$$\int_{0bx_0} \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx = \int_{0abx_0} \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx$$

et

$$\int_{0ax_0} \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx = \int_{0bax_0} \frac{f(x) - a_0}{x}\, dx,$$

de sorte que

$$\int_{0bx_0} \frac{f(x) - a_0}{x} dx - \int_{0ax_0} \frac{f(x) - a_0}{x} dx = \int_{bx_0} - \int_{bax_0}.$$

En prenant a et b assez près de x_0, chacune des deux intégrales du second membre est inférieure en valeur absolue à ε. La différence au premier membre est donc plus petite qu'une quantité quelconque donnée à l'avance ; mais elle est déterminée, étant donné que chacun des termes est un nombre déterminé. Elle est donc o. Ce qui démontre que pour les points de l'arc $(\alpha\beta)$ la fonction $f_1(x)$ a une fonction limite indépendamment du chemin suivi à l'intérieur du cercle de convergence. On en conclut immédiatement à la continuité de la fonction limite $f_1(e^{it})$.

Établissons enfin que cette fonction continue $f_1(x)$ est à nombres dérivés bornés sur l'arc considéré. Soit x un point quelconque de cet arc et $x + h_\nu$ un point à l'intérieur du cercle de convergence, h_ν tendant vers o de telle façon que $x + h_{\nu+1}$ soit plus près du cercle que $x + h_\nu$. Nous avons vu que dans l'intégrale

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{f(x) - a_0}{x} dx$$

le chemin d'intégration est une courbe rectifiable quelconque à l'intérieur du cercle de convergence. Prenons maintenant pour ce chemin le rayon $(o, x + h_1)$ et la ligne polygonale convexe déterminée par les points $x + h_\nu$. On a ainsi

$$f_1(x + h_\nu) - f_1(x) = \int_x^{x+h_\nu} \frac{f(x) - a_0}{x} dx,$$

de sorte que

$$|f_1(x + h_\nu) - f_1(x)| < |h_\nu| \mathrm{K},$$

où K est un nombre fixe déterminé une fois pour toutes quand l'arc (α, β) est donné. Il en résulte que

$$\limsup_{\nu=\infty} \left| \frac{f_1(x + h_\nu) - f_1(x)}{h_\nu} \right| \leqq \mathrm{K}.$$

Regardons d'autre part les points de l'arc (α, β) de l'argument $\theta + \eta_\nu$, la suite η_ν tendant vers o d'une manière monotone. Pour chaque ν on a

$$\frac{f_1(e^{i(\theta+\eta_\nu)})-f_1(e^{i\theta})}{e^{i(\theta+\eta_\nu)}-e^{i\theta}}=\lim_{r=1}\frac{f_1(r\,e^{i(\theta+\eta_\nu)})-f_1(e^{i\theta})}{r\,e^{i(\theta+\eta_\nu)}-e^{i\theta}};$$

on peut déterminer à chaque η_ν un $r_\nu > r_{\nu-1}$ de sorte que, ε étant aussi petit qu'on veut, on ait

$$\left|\frac{f_1(r_\nu e^{i(\theta+\eta_\nu)})-f_1(e^{i\theta})}{r_\nu e^{i(\theta+\eta_\nu)}-e^{i\theta}}-\frac{f_1(e^{i(\theta+\eta_\nu)})-f_1(e^{i\theta})}{e^{i(\theta+\eta_\nu)}-e^{i\theta}}\right|<\varepsilon.$$

On en conclut que

$$\limsup_{\nu=\infty}\left|\frac{f_1(e^{i(\theta+\eta_\nu)})-f_1(e^{i\theta})}{e^{i(\theta+\eta_\nu)}-e^{i\theta}}\right|\leqq \mathrm{K},$$

qui prouve enfin que $f_1(x)$ est à nombres dérivés bornés sur l'arc (α, β). Ajoutons que le lemme ainsi établi ne suppose aucune restriction sur les coefficients tayloriens.

5. Servons-nous du lemme ainsi établi. M. Lebesgue [1] a démontré qu'une telle fonction $f_1(x)$ a une dérivée pour un ensemble de points dont le complémentaire est de mesure nulle et que, de plus, une telle fonction est l'intégrale indéfinie de sa dérivée considérée seulement pour l'ensemble des points où celle-ci existe. Soit $\psi(t)=\psi_1(t)+i\psi_2(t)$ la fonction égale à $f_1'(e^{it})e^{it}$ où la dernière existe et égale à A aux autres points.

Cela posé, reprenons l'intégrale I, et, pour pouvoir effectuer successivement deux intégrations par partie, montrons que la dérivée de $\mathrm{F}(t)$ est continue et à nombres dérivés bornés.

Tout d'abord, x étant un point quelconque à l'intérieur du cercle de convergence ou sur l'arc (α, β),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}x^n=\int_0^x\frac{f_1(x)}{x}\,dx,$$

où le chemin d'intégration est une courbe rectifiable quelconque. Mais

$$\mathrm{F}(t)=-\sum\frac{a_n}{n^2}e^{int}=-\int_0^{e^{it}}\frac{f_1(x)}{x}\,dx$$

---

[1] LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 123.

et $e^{i\theta}$ étant un point fixe de l'arc, si l'on prend pour chemin d'intégration le rayon $(o, e^{i\theta})$ et l'arc $(e^{i\theta}, e^{it})$, nous aurons d'après le lemme précédent

$$\int_0^x \frac{f_1(x)}{x}\,dx = c + \int_{e^{i\theta}}^{e^{it}} \frac{f_1(x)}{x}\,dx = c + i\int_\theta^t f_1(e^{it})\,dt.$$

Par suite,

$$\frac{d\,\mathrm{F}(t)}{dt} = -\,i\,f_1(e^{it}),$$

ce qui démontre que $\mathrm{F}(t)$ est continue et à nombres dérivés bornés comme la fonction $f_1(e^{it})$.

La seconde dérivée de $\mathrm{F}(t)$ existe donc pour chaque point de l'arc, sauf peut-être un ensemble de mesure nulle, et dans ces points

$$\mathrm{F}''(t) = \psi(t).$$

En particulier, on démontre sans peine par le raisonnement dont nous nous sommes servis dans la seconde partie de la démonstration du lemme précédent, que si, à l'intérieur du cercle $\lim\limits_{x=e^{i\theta}} f(x) = \mathrm{A}$, on a $\lim\limits_{t=0} \psi(t) = \mathrm{A}$. Plus généralement soit α un point du rayon $(o, e^{i\theta})$; traçons autour de α comme centre un cercle c_1 de rayon $|e^{i\theta} - \alpha|$ passant par conséquent par $e^{i\theta}$. Le cercle de convergence et la partie de la circonférence c_1 près de $e^{i\theta}$ déterminent à l'intérieur du cercle de convergence deux voisinages distincts de $e^{i\theta}$. Supposons que dans le premier voisinage $\lim\limits_{x=e^{i\theta}} f(x) = \mathrm{A}$ et dans le second $\lim\limits_{x=e^{i\theta}} f(x) = \mathrm{B}$, et, dans la définition de ψ, ayons égard à cette circonstance en donnant à ψ, dans les points où sa détermination est arbitraire, la valeur A respectivement B selon que ce point se trouve sur la frontière du premier ou du second voisinage. Nous avons ainsi

$$\psi(\theta + o) = \mathrm{A}, \qquad \psi(\theta - o) = \mathrm{B}.$$

Effectuons dès lors la réduction de l'intégrale I à une intégrale plus simple. Une première intégration par partie, grâce aux conditions imposées à $\rho(t)$, nous donne

$$I = -\frac{1}{2\pi n}\int_b^c [F'(t)\rho(t) + F(t)\rho'(t)]\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta-t}{2}}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right)^2 dt.$$

De la seconde intégration par partie on obtient

$$I = \frac{1}{2\pi n}\int_b^c [\psi(t)\rho(t) + 2F'(t)\rho'(t) + F(t)\rho''(t)]\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta-t}{2}}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right)^2 dt,$$

parce que l'égalité

$$[F'(t)\rho(t)]' = F'(t)\rho'(t) + \rho(t)\psi(t)$$

subsiste pour chaque point de l'arc considéré, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle. On en conclut par le théorème de M. Lebesgue cité tout à l'heure que le second membre a pour intégrale indéfinie la fonction $F'(t)\rho(t)$ et comme toutes les fonctions considérées sont bornées, $F'(t)\rho(t)$ est la fonction primitive du second membre, ce qui justifie enfin la seconde intégration par partie.

6. Nous avons vu que les limites $\psi(\theta+0)$ et $\psi(\theta-0)$ existent. La fonction $\varphi(t) = \psi(t)\rho(t) + 2F'(t)\rho'(t) + F(t)\rho''(t)$ est donc continue à gauche et à droite au point $t=\theta$. Il nous reste à démontrer que, sous cette condition, l'intégrale où nous avons écrit, pour plus de simplicité, $\theta = 0$,

$$I = \frac{1}{\pi n}\int_0^c \varphi(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt,$$

tend vers une valeur bien déterminée pour $n=\infty$.

Supposons d'abord que $\varphi(+0)=0$. Il en résulte que, ε étant donné, on peut trouver, au côté positif de l'origine $t=0$, un nombre positif $\alpha < \frac{\pi}{2}$ tel que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ dans l'intervalle $(0, \alpha)$. D'autre part,

$$I = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \varphi(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\alpha} \varphi(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt + \int_\alpha^c \varphi(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = A + B + C.$$

Mais

$$|A| < \frac{(n+1)^2}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} |\varphi(t)|\,dt < \frac{(n+1)^2}{2n\pi}\varepsilon\frac{\pi}{2n+1} < \varepsilon,$$

car

$$\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \cos t\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt\right) \leqq \frac{(n+1)^2}{2}$$

et

$$|B| < \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\alpha} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{t^2}|\varphi(t)|\,dt < \frac{\pi}{4n}\varepsilon\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\alpha}\frac{dt}{t^2} < \varepsilon,$$

parce que dans l'intervalle $(0, \alpha)$

$$\sin t > \frac{2}{\pi}t,$$

et enfin

$$|C| < \frac{1}{\pi n \sin^2\alpha}\int_\alpha^c |\varphi(t)|\,dt,$$

de sorte que C tend vers o pour $n = \infty$. Il en est donc de même de l'intégrale I.

Si $\varphi(+0) = c_0 \neq 0$, on pose

$$\varphi(t) = c_0 + \eta(t),$$

de sorte que $\eta(+0) = 0$. On aura ainsi

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^c \varphi(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{c_0}{\pi n}\int_0^c \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt + \frac{1}{\pi n}\int_0^c \eta(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

On sait d'autre part que

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{1}{2},$$

et le raisonnement sur C nous montre que

$$\frac{1}{\pi n}\left|\int_c^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right| < \frac{1}{\pi n \sin^2 c}\left(\frac{\pi}{2} - c\right).$$

Ces deux résultats réunis font ressortir que

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi n}\int_0^c \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right) dt = \frac{1}{2}.$$

Nous avons démontré par ces considérations l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi n} \int_0^c \varphi(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{\varphi(+0)}{2},$$

et l'on démontre de même l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi n} \int_b^0 \varphi(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{\varphi(-0)}{2}.$$

Nous avons donc établi la formule définitive

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi n} \int_b^c \varphi(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{\varphi(+0) + \varphi(-0)}{2}.$$

L'essentiel est pour nous, pour pouvoir profiter du théorème de Riemann, que l'intégrale considérée a une limite bien déterminée. Cela nous assure en effet que les moyennes arithmétiques des s_n tendent déjà vers une limite, et par cela le théorème général de la page 38 se trouve démontré.

LA DIVERGENCE DE LA SÉRIE DE TAYLOR ET LES SINGULARITÉS AU CERCLE DE CONVERGENCE.

7. Nous avons vu par les développements précédents que la série de Taylor, dont les coefficients tendent vers 0, représente la fonction définie par elle dans les points réguliers de son cercle de convergence et que, de plus, elle peut nous renseigner par sa somme ou par les moyennes arithmétiques des s_n sur l'allure de la fonction autour d'un point singulier du cercle, si toutefois la fonction tend vers une limite quand on s'approche de ce point à l'intérieur du cercle. Cela nous amène à poser la question suivante : Est-ce qu'une série divergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ permet de conclure, par la nature même de sa divergence, à l'allure de la fonction au voisinage de x_0? La réponse — si l'on précise un peu la question — est affirmative.

On sait par exemple que *la fonction $f(x)$ est bornée dans tout angle $\varphi_0 < \pi$, le sommet à x_0 et symétrique par rapport* *à* $(0, x_0)$, *si les* s_n *ou du moins leurs moyennes arithmétiques sont bornées en valeur absolue.*

En effet

$$\frac{f(x x_0)}{(1-x)^2} = \sum_{n=0} [s_0 + s_1(x_0) + \ldots + s_n(x_0)] x^n,$$

et, par hypothèse, pour $n > p$,

$$\left| \frac{s_0 + s_1(x_0) + \ldots + s_n(x_0)}{n} \right| < A.$$

On a par suite

$$|f(x)| < |1-x|^2 |P_p(x)| + |1-x|^2 A \sum_{n=1} n|x|^n,$$

où $P_p(x)$ est un polynome de degré p.

Mais

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|x|^n = \frac{|x|}{(1-|x|)^2},$$

de sorte que

$$|f(x)| < |1-x|^2 |P_p(x)| + A|x| \frac{|1-x|^2}{(1-|x|)^2}.$$

Et un calcul élémentaire montre que dans l'angle considéré

$$\limsup_{x=1} \frac{|1-x|}{1-|x|} \leqq \frac{1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}},$$

ce qui démontre la proposition. Le même raisonnement s'applique d'ailleurs aux moyennes arithmétiques d'ordre quelconque.

La réciproque est vraie aussi. *Si pour chaque chemin à l'intérieur du cercle de convergence aboutissant à* x_0 *la fonction reste au-dessous en valeur absolue à un nombre fixe, les moyennes arithmétiques sont bornées en valeur absolue pour* $n = \infty$.

La démonstration en est la répétition presque complète du raisonnement du paragraphe précédent supposé toutefois que le signe $\int$ ait le sens que M. Lebesgue lui a donné.

En résumé, les coefficients tendant vers 0, la suite $\sigma_n(x_0)$ des moyennes arithmétiques nous décèle l'allure générale de la fonction étudiée au voisinage de x_0. Si les $\sigma_n(x_0)$ tendent pour $n=\infty$ vers la limite A, la fonction tend vers la même valeur dans tout angle $\varphi_0 < \pi$ de l'espèce considérée. Si la limite A n'existe pas, mais la suite $|\sigma_n(x_0)|$ est bornée, la fonction est indéterminée en x_0, mais bornée dans l'angle φ_0. Si, enfin, la limite supérieure de la suite $|\sigma_n(x_0)|$ est infinie, nous sommes assurés que la fonction devient infinie au voisinage de x_0.

8. Dans le dernier cas, nous pouvons poursuivre encore plus loin la correspondance entre la divergence de la série et la façon dont la fonction devient infinie. Nous allons établir à cet effet un théorème dû, dans sa forme générale, à M^me^ Valérie Dienes [1]:

Si, au voisinage de x_0, la fonction est de la forme

$$f(x) = \frac{P_q\left(\log \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right)}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\rho}} + f_1(x),$$

où $P_q(x) = A_q x^q + A_{q-1} x^{q-1} + \ldots + A_0$ *et l'ordre de* $f_1(x)$ *en* x_0 *est* $\rho' < \rho$, *on a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(x_0)}{n^{\rho} \log^q n} = \frac{A_q}{\Gamma(\rho+1)}.$$

En particulier, dans les points critiques algébrico-logarithmiques, la nature de la divergence de la série est en relation à la fois simple et précise avec la structure de la singularité qui se trouve caractérisée ainsi d'une manière complète par les s_n, donc, en dernière analyse, par les coefficients tayloriens a_n qui, par hypothèse, tendent vers 0.

Tout d'abord un calcul fondamental pour la suite nous donnera l'ordre de la croissance des s_n formés au point 1 pour la fonction

$$\frac{\log^q \dfrac{1}{1-x}}{(1-x)^{\rho}} = \sum \alpha_n x^n.$$

---

(1) Valérie Dienes, *Sur les points critiques logarithmiques* (*Comptes rendus*, t. CXLVIII, séance du 26 avril 1909). *Voir* encore P. et V. Dienes, *Recherches nouvelles sur les singularités des fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 1911, p. 389).

Les s_n de la fonction

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

sont

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$$

or, d'après l'égalité établie par Euler,

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = c, \tag{6}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\log n} = 1. \tag{7}$$

Cherchons maintenant les s_n de la fonction

$$\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q.$$

On peut écrire que

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

d'où, en développant le binome,

$$\begin{aligned} \left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q = {} & \left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{x}\right)^q \\ & + q\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)^{q-1} R_n(x) + \ldots + [R_n(x)]^q. \end{aligned}$$

Les termes de la forme Cx^k ($k \leqq n$) se trouvent sans exception dans la première parenthèse; donc, les coefficients étant positifs, on a pour x positif et inférieur ou égal à 1

$$s_n^{(q)}(x) \leqq \left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)^q,$$

d'où en particulier

$$s_n^{(q)} \leqq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^q,$$

et d'après (6)

$$s_n^{(q)} \leqq (\log n + c')^q \qquad (c' > c),$$

ou enfin

$$\limsup_{n=\infty} \frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q} \leqq 1. \tag{8}$$

Cherchons maintenant la limite inférieure. On peut écrire

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\frac{n}{q}}}{\frac{n}{q}} + R_{\frac{n}{q}}(x),$$

où, à la rigueur, au lieu de $\frac{n}{q}$ il faut prendre sa partie entière. On en conclut comme auparavant que

$$s_n^{(q)}(x) \geqq \left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\frac{n}{q}}}{\frac{n}{q}} \right)^q,$$

car il y a des termes de degré inférieur à n, qui sont négligés. En particulier

$$s_n^{(q)} \geqq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\frac{n}{q}} \right)^q$$

ou encore

$$s_n^{(q)} \geqq \left(\log \frac{n}{q} + c' \right)^q = (\log n - \log q + c')^q;$$

d'où l'on conclut que

$$\liminf_{n=\infty} \frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q} \geqq 1.$$

Donc, d'après (8), on a pour la limite cherché

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q} = 1.$$

9. Regardons les s_n de la fonction

$$\frac{\left[\log \frac{1}{1-x} \right]^q}{(1-x)^\rho},$$

que nous désignerons par $s_n^{q,\rho}$. Nous avons vu que d'après (9)

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q} = 1,$$

et l'on sait que pour les s_n de la fonction $\frac{1}{(1-x)^\rho}$ on a

$$(10) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(\rho)}}{n^\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}.$$

A l'aide de ces deux limites nous allons calculer la croissance de $s_n^{q,\rho}$. Tout d'abord

(11) $$s_n^{q,\rho} \leqq s_n^{(q)} s_n^{(\rho)}.$$

En effet, on peut écrire

$$\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q \frac{1}{(1-x)^\rho} = \begin{array}{l}[\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x^n+R_n(x)] \\ \times[\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_n x^n+R'_n(x)],\end{array}$$

où les α et les β sont positifs. On en conclut à (11), et, grâce à (9) et à (10), nous avons

(12) $$\limsup_{n=\infty} \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho[\log n]^q} \leqq \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}.$$

Pour trouver la limite inférieure, soient k un nombre plus grand que 1, $\varepsilon(n)$ la partie entière de n, et enfin soient

$$\varepsilon\left(\frac{k-1}{k}n\right) = r,$$

$$\varepsilon\left(\frac{n}{k}\right) = s,$$

nous allons démontrer que

(13) $$s_n^{q,\rho} > s_r^{(q)} s_s^{(\rho)}.$$

La fonction envisagée peut s'écrire

$$\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q \frac{1}{(1-x)^\rho} = \begin{array}{l}[\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_r x^r+R_r(x)] \\ \times[\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_s x^s+R_s(x)].\end{array}$$

La plus grande puissance de x qui se trouve dans le produit

$$[\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_r x^r][\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_s x^s]$$

est

$$r+s \leqq \frac{k-1}{k}n + \frac{n}{k} = n.$$

D'où il ressort en particulier pour $x=1$ que

$$s_n^{q,\rho} > s_r^{(q)} s_s^{(\rho)}.$$

Mais, pour éliminer r, on peut écrire

$$r = \eta\frac{k}{k-1}n,$$

où η tend vers l'unité quand n devient infini, donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log r}{\log n} = 1,$$

et, pour éliminer s, écrivons

$$s = \frac{n}{k} + \eta_1,$$

où η_1 est inférieur à l'unité, d'où

$$\lim_{n=\infty} \frac{s}{n} = \frac{1}{k}.$$

Les égalités, identiques d'ailleurs à (9) et à (10),

$$\lim_{r=\infty} \frac{s_r^{(q)}}{[\log r]^q} = 1$$

et

$$\lim_{s=\infty} \frac{s_s^{(\rho)}}{s^\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)},$$

se transforment donc en

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_r^{(q)}}{[\log n]^q} = 1$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_s^{(\rho)}}{n^\rho} = \frac{1}{k^\rho\,\Gamma(\rho+1)}.$$

Si l'on divise l'inégalité (13) par $(\log n)^q n^\rho$, on obtient

(14) $$\lim_{n=\infty} \text{inf.}\, \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho[\log n]^q} \geqq \frac{1}{k^\rho\,\Gamma(\rho+1)}.$$

Cette inégalité, combinée avec (12), nous montre que, pour n assez grand, le rapport

$$\Gamma(\rho+1)\frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho[\log n]^q}$$

est entre $\frac{1}{k^\rho}$ et 1. Mais k est aussi près de l'unité qu'on veut, d'où il est évident enfin que

(15) $$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho \log^q n} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}.$$

10. Il nous reste à évaluer l'ordre de grandeur des s'_n relatifs à

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

dont l'ordre en x_0 est $\rho' < \rho$ et dont les coefficients b_n tendent vers o pour $n = \infty$. En effet, on voit immédiatement que les coefficients c_n de la fonction

$$\frac{P_q\left(\log \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right)}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\rho}} = \sum c_n x^n$$

tendent vers o, car cette fonction est d'ordre $\rho < 1$ sur le cercle entier.

On peut poser

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n,$$

où $\varphi_2(x)$ est holomorphe en x_0, $\varphi_1(x)$ est d'ordre $\rho_1 = \rho' + \varepsilon < \rho$ sur le cercle entier et $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n=\infty} \beta_n = 0$. Par conséquent, d'après le théorème de M. Fatou,

$$\lim_{n=\infty} (\beta_0 + \beta_1 x_0 + \ldots + \beta_n x_0^n) = \varphi_2(x_0).$$

D'autre part,

$$1 + \limsup_{n=\infty} \frac{\log |\alpha_n|}{\log n} = \rho_1,$$

c'est-à-dire, pour n assez grand,

$$|\alpha_n| < n^{\rho_1 - 1 + \varepsilon},$$

quelque petit que soit ε. On peut donc écrire $|\alpha_n| = \dfrac{\varepsilon_n}{n^{1-\rho}}$ avec $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

Soit m un tel indice que pour $n > m$, $\varepsilon_n < \varepsilon$. On a

$$\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2^{1-\rho}} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{n^{1-\rho}} < \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2^{1-\rho}} + \ldots + \frac{\varepsilon_m}{m^{1-\rho}}$$
$$+ \varepsilon \left[\frac{1}{(m+1)^{1-\rho}} + \ldots + \frac{1}{n^{1-\rho}}\right],$$

de sorte que

$$\frac{\varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2}{2^{1-\rho}} + \ldots + \dfrac{\varepsilon_n}{n^{1-\rho}}}{n^\rho} < \frac{\varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2}{2^{1-\rho}} + \ldots + \dfrac{\varepsilon_m}{m^{1-\rho}}}{n^\rho} + \frac{\varepsilon \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\rho}}}{n^\rho}.$$

La formule connue

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\rho}}}{n^\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}$$

nous montre que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|}{n^\rho} = 0.$$

En somme, si x_0 est un point singulier d'ordre inférieur à ρ et si les coefficients tendent vers 0, les $s_n(x_0)$ satisfont nécessairement à la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(x_0)}{n^\rho} = 0.$$

C'est le cas de $f_1(x)$ en x_0.

Pour conclure, il nous reste à remarquer encore que

$$s_n(x_0) = A_q s_n^{q,\rho} + A_{q-1} s_n^{q-1,\rho} + \ldots + A_0 s_n^{(\rho)} + \ldots + s'_n(x_0).$$

En divisant chaque terme par $n^\rho \log^q n$, on obtient la relation annoncée dans le théorème qui était à établir.

LA SOMMATION DE LA SÉRIE DE TAYLOR DONT LES COEFFICIENTS SONT A CROISSANCE FINIE.

11. Supposons que les coefficients a_n de la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

au lieu de tendre vers 0, satisfassent à la condition plus large

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0 \qquad (r > 0).$$

En général, la série n'est pas convergente en aucun point du cercle de convergence ; nous devons donc recourir à une méthode de sommation plus puissante que la méthode simple qui consiste à chercher la limite des s_n. Nous allons voir que la méthode générale des moyennes arithmétiques permet d'étudier d'une manière assez complète l'allure de la série de Taylor sur son cercle de convergence.

Voici la définition des moyennes arithmétiques d'ordre réel r. Soit

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r)} x^n,$$

c'est-à-dire soit

$$S_n^{(r)} = \sum_{n=0}^{n} B_{n-i}^{(r+1)} a_i.$$

Les expressions

$$(16) \qquad s_n^{(r)} = \frac{\Gamma(r+1) S_n^{(r)}}{n^r} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

sont, par définition, les moyennes arithmétiques d'ordre r. M. Knopp (¹) et M. Schnee (²) ont démontré que, pour r entier, cette définition est équivalente à la définition ordinaire

$$(17) \qquad \sigma_n^{(r)} = \frac{\sigma_0^{(r-1)} + \sigma_1^{(r-1)} + \ldots + \sigma_n^{(r-1)}}{n+1} \qquad (\sigma_n^{(0)} = s_n),$$

dans le sens que l'existence de la limite pour $n = \infty$ de (16) entraîne celle de la limite de (17) et inversement.

A l'aide des moyennes arithmétiques ainsi définies, démontrons tout d'abord le théorème important de M. Hadamard sur la sommation de la série de Taylor aux points réguliers du cercle de convergence.

Si

$$(18) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{r-\varepsilon}} = 0, \qquad (\varepsilon > 0),$$

(¹) KNOPP, *Grenzwerthe von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze*, 1907, p. 19.

(²) SCHNEE, *Die Identität des Cesàro'schen und Hölderschen Grenzwerthes* (*Math. Annalen*, t. LXVII, 1909, p. 110).

les moyennes arithmétiques d'ordre r ont une limite bien déterminée en chaque point régulier du cercle et cette limite est la valeur de la fonction $f(x) = \Sigma a_n x^n$ *à ce point.*

Pour le démontrer remarquons que, à cause de (18), $f(x)$ est d'ordre moindre que $r+1$ sur le cercle de convergence et que x_0 étant le point régulier en question,

$$f(x_0 x) = f(x_0) + (1-x) f_1(x),$$

où

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est holomorphe. Il en résulte que

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r)}(x_0) x^n = \frac{f(x_0)}{(1-x)^{r+1}} + \frac{f_1(x)}{(1-x)^r},$$

et la dernière partie du second membre est, comme $f_1(x)$, d'ordre inférieur à $r+1$ sur le cercle entier car, d'après les propriétés de l'ordre, le facteur $(1-x)^{-r}$ ne change pas l'ordre dans aucun point du cercle, sinon au point 1, dont l'ordre est au plus r. Le rapport des coefficients tayloriens de la seconde et de la première partie du second membre tend donc vers 0. On en conclut à la relation

$$S_n^{(r)} = f(x_0) B_n^{(r+1)}(1+\varepsilon_n),$$

ce qui démontre enfin, en tenant compte des propriétés bien connues des coefficients binomiaux $B_n^{(r+1)}$, que

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(x_0) = f(x_0),$$

comme il fallait le démontrer.

12. M. Marcel Riesz [1] a généralisé ce résultat en montrant, par un calcul qui ne manque pas d'intérêt, que la condition (18)

---

(1) M. Riesz, *Sur les séries de Dirichlet et les séries entières* (*Comptes rendus*, séance du 22 novembre 1909).

peut être remplacée par la condition plus générale

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0,$$

sans qu'on ait à modifier le théorème. Nous ne reproduisons sa démonstration que pour le cas $r = 1$, et supposons, pour simplifier l'écriture, que $x_0 = 1$.

D'après le théorème de M. Fatou, la série

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$$

est convergente en $x = 1$ car, par hypothèse, ses coefficients tendent vers o pour $n = \infty$ et le point 1 est régulier. Les sommes

$$\sigma_n = a_0 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n},$$

et, *a fortiori*, leurs moyennes arithmétiques tendent donc vers $\varphi(1)$. Mais

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n}{n} = a_0 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

ce qui nous montre que

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0 \qquad (s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

D'autre part,

$$|s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)}| = \left| -\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{s_n}{n+1} \right|$$
$$< \frac{|s_0| + \dfrac{|s_1|}{1} + \ldots + \dfrac{|s_{n-1}|}{n-1}}{n} + \frac{|s_n|}{n+1},$$

de façon que

$$\lim_{n=\infty} (s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)}) = 0.$$

Supposons maintenant que $f(1) = f'(1) = 0$, ce qu'on peut toujours réaliser en ajoutant à $f(x)$ une expression $a + bx$ convenablement choisie, et appliquons le théorème de M. Fatou à la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)}) x^n = \frac{1-x}{x} \int_0^x \frac{f(x)}{(1-x)^2} dx.$$

On le peut, étant donné que la fonction représentée par elle est holomorphe au point 1. Il en ressort que la limite de $s_n^{(1)}$ existe, comme il fallait le démontrer.

Par un passage de $r-1$ à r, on établit ainsi facilement la proposition pour r entier. Ajoutons une remarque générale qui est en quelque sorte la réciproque du théorème précédent. Si les $s_n^{(r)}(x_0)$, pour $n=\infty$, tendent vers une limite bien déterminée A, $f(x)$ s'approche indéfiniment de A quand on s'achemine vers x_0 à l'intérieur du cercle sans y toucher.

Supposons, en effet, que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(r+1)\, S_n^{(r)}}{n^r} = A,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{S_n^{(r)}}{B_n^{(r+1)}} = A + \varepsilon_n,$$

et soit p un indice tel que $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ pour $n \geqq p$. On aura

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r)} x^n = A \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r+1)} x^n + P(x) + \sum_{n=p}^{\infty} \varepsilon_n B_n^{(r+1)} x^n;$$

$P(x)$ est un polynome de degré p. Mais, par définition,

$$(1-x)^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r+1)} x^n = 1,$$

de sorte que

$$|f(x) - A| < |1-x|^{r+1} |P(x)| + \varepsilon |1-x|^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r+1)} |x|^n,$$

ce qui démontre notre remarque, car

$$\sum_{n=0} B_n^{(r+1)} |x|^n = \frac{1}{(1-|x|)^{r+1}}$$

et

$$\lim_{x=1} |1-x|^{r+1} P(x) = 0, \qquad \limsup_{x=1} \frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{1}{\cos\varphi_0},$$

où, par hypothèse, $|\varphi_0| < \frac{\pi}{2}$.

L'existence de la limite de $f(x)$ dans le voisinage angulaire $(<\pi)$ du point considéré résulte de l'existence de la limite des moyennes arithmétiques.

13. Regardons les points singuliers du cercle de convergence. En ce qui concerne les points d'ordre négatif on établit facilement le théorème suivant :

Si $\lim\limits_{n=\infty} n^{-r} a_n = 0$, *les moyennes arithmétiques d'ordre r tendent vers une limite dans chaque point* x_0 *d'ordre négatif du cercle, et cette limite est la valeur dont la fonction s'approche indéfiniment quand* x *tend vers* x_0 *à l'intérieur du cercle.*

La démonstration est identique à celle dont nous nous sommes servis pour le cas $r=0$. On écrit $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; $f_1(x)$ est d'ordre négatif sur le cercle entier, son développement taylorien, et *a fortiori* les moyennes arithmétiques d'ordre r, convergent en chaque point du cercle, en particulier en x_0. D'autre part $f_2(x)$ est holomorphe en x_0 et l'on voit aisément que ses coefficients tayloriens c_n satisfont à la condition $\lim\limits_{n=\infty} n^{-r} c_n = 0$, de façon que, d'après le théorème du numéro précédent, les moyennes arithmétiques correspondantes convergent vers $f_2(x_0)$. Ces deux résultats réunis démontrent enfin le théorème en vue.

Pour les points de continuité, nous allons généraliser de même le théorème correspondant (p. 38) [1] :

Si $\lim\limits_{n=\infty} n^{-r} a_n = 0$, *les moyennes arithmétiques d'ordre r convergent en chaque point* x_0 *du cercle où l'on a, pour toute courbe qui de l'intérieur du cercle de convergence aboutit à* x_0, $\lim\limits_{x=x_0} f(x) = \mathrm{A}$.

La démonstration consiste dans la réduction au cas $r=0$ par notre lemme fondamental de la séparation des singularités que nous allons exposer.

Soit donnée la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

ayant pour rayon de convergence l'unité, et ne faisons aucune

---

(1) P. DIENES, *Comptes rendus*, 1911.

hypothèse supplémentaire sur les a_n. Soit x_0 un point du cercle de convergence.

Si, à l'intérieur du cercle de convergence,

$$\limsup_{x=x_0} |f(x)| = \text{A (fini)}, \tag{19}$$

on peut poser

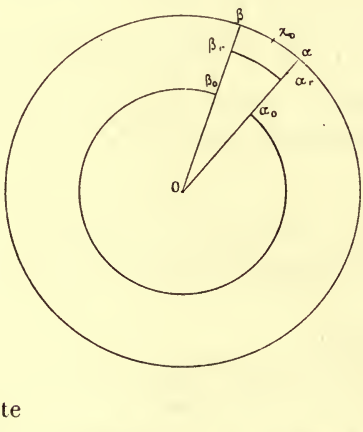
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ *sont holomorphes à l'intérieur du cercle de rayon* 1 ; *de plus,* $f_2(x)$ *est holomorphe sur un petit arc comprenant* x_0 *à son intérieur et* $\lim_{n=\infty} b_n = 0$.

Par ce lemme, la singularité en x_0 pourra être considérée comme appartenant entièrement à une fonction ayant un développement taylorien dont les coefficients tendent vers 0.

Nous avons vu (p. 39) que la condition (19) entraîne l'existence d'un petit arc (α, β), comprenant x_0 à son intérieur, tel que $f(x)$ est bornée dans le triangle $O\alpha\beta$ (*fig.* 4). La formule de Cauchy

Fig. 4.



nous donne ensuite

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_r \beta_0 \alpha_0 \alpha_r} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_r \beta_r} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \varphi_r(x) + f_r(x).$$

Mais $|f(x)|$ est bornée vers l'arc (α, β). On en conclut à l'existence de la limite de $\varphi_r(x)$, par conséquent à celle de $f_r(x)$ pour $r = 1$. D'autre part

$$f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r) x^n.$$

avec

$$(20) \qquad b_n(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_r \beta_r} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

et l'on voit aisément que, pour $r = 1$, $b_n(r)$ tend vers une valeur bien déterminée b_n, le coefficient taylorien de la fonction $f_1(x) = \lim\limits_{r=1} f_r(x)$. Montrons que $\lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$.

Posons à cet effet $x = re^{i\varphi}$ et envisageons les fonctions examinées de x comme fonctions de φ, r étant pris pour un paramètre. Remarquons tout d'abord que

$$\left| \int_{\alpha_0}^{\alpha_r} \frac{f(z)\,dz}{z - x} \right| < \mathrm{A}' \int_{\alpha_0}^{\alpha_r} \frac{|dz|}{|x - z|},$$

A' étant supérieur au module maximum de $f(x)$ dans le domaine triangulaire $(\mathrm{O}, \alpha, \beta)$.

Un calcul élémentaire nous montre cependant qu'on a indépendamment de $r > r_1 > |\alpha_0|$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_r} \frac{|dz|}{|x - z|} < \mathrm{B} + \mathrm{C}\,|\log(\varphi - \alpha)|,$$

où les constantes B et C sont déterminées uniquement par $|\alpha_0|$. En se servant convenablement de cette remarque, on voit que les fonctions $f_r(x)$, ainsi que leurs carrés, sont absolument sommables (intégrables) sur leurs cercles de convergence respectifs (de rayon égal à r pour $f_r(x)$ et contenant les seuls points singuliers possibles : $x = \alpha_r$ et $x = \beta_r$) ; et, de plus, les intégrales ainsi considérées ont une borne supérieure finie pour $r = 1$. Il en résulte, grâce à la formule bien connue de Parseval relative aux coefficients des séries trigonométriques, que la limite supérieure pour $r = 1$ des quantités $\sum\limits_{n=0} r^{2n} |b_n(r)|^2$ est finie. On en conclut enfin que la série $\sum_{n=0} |b_n|^2$ est convergente, c'est-à-dire que $\lim_{n=\infty} b_n = 0$.

Si l'on remarque enfin que la fonction $f_2(x) = \lim_{r=1} \varphi_r(x)$ est holomorphe sur l'arc (α, β) comme sa forme d'intégrale le montre immédiatement, le lemme proposé se trouve établi.

Les conditions du lemme sont satisfaites par la fonction $f(x)$ qui, à l'intérieur du cercle, tend vers une limite A. On peut donc poser conformément au lemme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Comme $\lim_{n=\infty} b_n = 0$, notre théorème de la page 38 nous assure que les moyennes arithmétiques correspondantes $s_n^{(1)}(b_n, x_0)$ et *a fortiori* $s_n^{(r)}(b_n, x_0)$ s'approchent indéfiniment de A pour $n = \infty$.

D'autre part, $f_2(x)$ est holomorphe en x_0 et

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^r} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n - b_n}{n^r} = 0,$$

de sorte que nous pouvons nous servir du résultat du n° **12**, ce qui nous donne

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(c_n, x_0) = f_2(x_0).$$

Enfin

$$s_n^{(r)}(a_n, x_0) = s_n^{(r)}(b_n, x_0) + s_n^{(r)}(c_n, x_0),$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'on pose $r = 1$, on voit en particulier que le théorème (p. 38) d'après lequel les moyennes arithmétiques ordinaires

$$\frac{s_0 + s_1(x_0) + \ldots + s_n(x_0)}{n+1}$$

tendent vers $f(x_0)$, reste vrai sans aucune modification, même dans le cas où les coefficients ne tendent pas vers 0, mais

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

14. Nous avons vu cependant que, plus généralement, on peut conclure de l'allure des moyennes arithmétiques à l'allure de la fonction. Par exemple, si les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque sont bornées en valeur absolue pour $n=\infty$, cette fonction, elle aussi, est bornée au voisinage angulaire ($<\pi$) du point considéré. Inversement, l'allure de la fonction peut déterminer celle des moyennes arithmétiques, comme nous allons le voir.

Les a_n étant tels que $\lim\limits_{n=\infty} n^{-r} a_n = 0$, si, à l'intérieur du cercle de convergence,

$$\limsup_{x=x_0} |f(x)| \leqq \mathrm{A},$$

on a nécessairement

$$\limsup_{n=\infty} |s_n^{(r)}(x_0)| \leqq \mathrm{A}.$$

Le lemme fondamental s'applique de nouveau :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

et, d'après le n° 12,

$$(22) \qquad \lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(c_n, x_0) = f_2(x_0).$$

D'autre part, notre théorème (p. 47) nous montre que la suite $|s_n^{(1)}(b_n, x_0)|$ est bornée pour $n=\infty$. Il ne nous reste qu'à faire voir qu'il en est de même des moyennes arithmétiques d'ordre r.

Remarquons pour cela que

$$(23) \qquad \mathrm{S}_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}_{n-i}^{(r-r')} \mathrm{S}_i^{(r')},$$

et supposons que les moyennes arithmétiques d'ordre $r' < r$ sont bornées en valeur absolue, c'est-à-dire que

$$|\mathrm{S}_n^{(r')}| < \mathrm{A}(n+1)^{r'}.$$

Nous devons conclure que

$$|S_n^{(r)}| < B(n+1)^r.$$

Mais, en général,

$$|B_n^{(\alpha)}| < C(n+1)^{\alpha-1},$$

de sorte que (23) nous fournit l'inégalité

$$|S_n^{(r)}| < CA\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)^{r-r'-1}(i+1)^{r'},$$

d'où, en posant $r - r' = k$,

$$|S_n^{(r)}| < CA(n+1)^{r'}\left[1+\frac{1}{2^{1-k}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^{1-k}}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{|S_n^{(r)}|}{(n+1)^r} < CA\frac{1}{(n+1)^k}\left[1+\frac{1}{2^{1-k}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^{1-k}}\right];$$

enfin, selon la formule

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i^{k-1}}}{(n+1)^k} = \frac{1}{\Gamma(k+1)},$$

on obtient

$$\limsup_{n=\infty}.\frac{|S_n^{(r)}|}{n^r} < \frac{CA}{\Gamma(k+1)} = B.$$

Nous pouvons donc affirmer que la suite $|s_n^{(r)}(b_n, x_0)|$ est bornée parce qu'elle l'est pour $r=1$, ce qui, joint à (22), démontre le théorème.

En résumé, si la suite $s_n^{(r)}(x_0)$ tend vers une limite A, la fonction s'approche de A quand x tend vers x_0 à l'intérieur du cercle de convergence au voisinage angulaire ($<\pi$) de ce point. Si cette suite n'a pas de limite, mais si elle reste bornée en valeur absolue, la fonction est indéterminée autour de x_0, mais elle est bornée au voisinage indiqué. Si, enfin, $\limsup_{n=\infty}.|s_n^{(r)}(x_0)| = \infty$, la fonction devient infinie au voisinage de x_0.

Les moyennes arithmétiques d'ordre r caractérisent ainsi en grande ligne l'allure de la fonction dans un point quelconque du cercle de convergence. Il nous reste à étudier plus particulièrement le cas où $s_n^{(r)}(x_0)$ devient infini et montrer que le degré d'infinitude de cette expression coïncide avec celui de la fonction.

L'ÉTUDE DES POLES ET DES POINTS CRITIQUES ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUES SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE [1].

15. Supposons que $f(x)$ soit en x_0 de nature algébrico-logarithmique, c'est-à-dire soit

$$f(x) = \frac{P_q\left(\log \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{x_0}}\right)}{\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^\rho} + f_1(x),$$

où $P_q(x) = A_q x^q + A_{q-1} x^{q-1} + \ldots + A_0$, $f_1(x)$ est d'ordre $\rho' < \rho$ en x_0. Si l'on suppose encore que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0,$$

nous avons nécessairement $\rho < r + 1$. On peut s'en convaincre facilement par le théorème de Cesàro.

Dans les conditions indiquées, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r-\rho)}}{n^\rho \log^q n} = \frac{\Gamma(r - \rho + 1)}{\Gamma(r + 1)} A_q, \tag{24}$$

c'est-à-dire que la partie dominante de la singularité se décèle complètement dans les moyennes arithmétiques d'ordre $r - \rho$.

Déterminons tout d'abord l'ordre de grandeur des moyennes arithmétiques des s_n d'ordre quelconque formées au point 1 pour

(1) P. DIENES, *La série de Taylor sur le cercle de convergence* (*Comptes rendus*, 1905, t. CXL, p. 189). — P. DIENES, *Essai sur les singularités des fonctions analytiques* (*Journal de Mathématiques*, 1911). — Mme V. DIENES, Note citée. — P. et V. DIENES, *Recherches nouvelles sur les singularités des fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 1911).

la fonction

$$\frac{\log^q \dfrac{1}{1-x}}{(1-x)^\rho}.$$

Nous savons que les $S_n^{(\alpha)}$ de cette fonction sont précisément les s_n de

$$\frac{\log^q \dfrac{1}{1-x}}{(1-x)^{\rho+\alpha}};$$

par conséquent, d'après (15),

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(\alpha)}}{n^{\rho+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\rho+\alpha+1)},$$

de sorte que

$$(25) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(\alpha)}}{n^\rho \log^q n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\rho+\alpha+1)}.$$

Cette remarque nous fait connaître d'une manière précise l'ordre de grandeur des $s_n^{(\alpha)}$ en nombre $q+1$ dont la somme forme le $s_n^{(\alpha)}$ de

$$\frac{P_q\left(\log \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right)}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^\rho}$$

en x_0. On peut décomposer d'autre part $f_1(x)$

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où $\varphi_2(x)$ est holomorphe en x_0 et l'ordre de $\varphi_1(x)$ sur le cercle entier est $\rho_1 < \rho' + \varepsilon < \rho$. Il en résulte comme auparavant que pour n assez grand

$$|b_n| < n^{\rho_1+\eta-1},$$

n étant aussi petit qu'on veut, c'est-à-dire que

$$(26) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{b_n}{n^{\rho-1}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n(b_n, x_0)}{n^\rho} = 0,$$

et, *a fortiori*,

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_n}{n^r} = 0,$$

qui entraîne

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^r} = 0.$$

Montrons que (26) est valable pour les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque s'il est valable pour les s_n. Supposons plus généralement que pour $r' \geqq 0$ mais inférieur à r, on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(r')}}{n^{r'+\rho}} = 0,$$

et démontrons qu'il en résulte nécessairement

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(r)}}{n^{r+\rho}} = 0.$$

On a d'abord, par définition,

$$S_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n-i}^{(r-r')} \varepsilon_i i^{r'+\rho}$$

avec

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Par suite, en posant $r - r' = \alpha$,

$$\frac{|S_n^{(r)}|}{n^r} \leqq c \frac{|\varepsilon_{n-1}| + \dfrac{|\varepsilon_{n-\nu}|}{2^{1-\alpha}} + \ldots + \dfrac{|\varepsilon_1|}{(n-1)^{1-\alpha}}}{n^\alpha}.$$

Soit $\alpha' < \alpha < 1$, et partageons la somme au numérateur en deux parties par le terme dont l'indice k de ε est la partie entière de $n - n^{\alpha'}$, et soit ε_ν le plus grand des quantités $|\varepsilon_{n-1}|$, $|\varepsilon_{n-2}$, ..., $|\varepsilon_k|$. Il est évident que $\lim_{n=\infty} \varepsilon_\nu = 0$, de sorte que la première partie est inférieure à la quantité

$$\varepsilon_\nu \frac{1 + \dfrac{1}{2^{1-\alpha}} + \ldots + \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}}{n^\alpha}$$

tendant vers 0 pour $n = \infty$. Il en est donc de même de la première partie. La seconde, à son tour, est inférieure à

$$\frac{A}{n^\alpha}\left[\frac{1}{k^{1-\alpha}}+\frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right],$$

où A est le plus grand des nombres $|\varepsilon_i|$. Mais le nombre des termes dans le crochet est $n^{\alpha'}$; par suite, la seconde partie est inférieure à

$$A n^{\alpha'-\alpha},$$

qui tend évidemment vers o avec $\frac{1}{n}$.

Nous avons supposé dans la démonstration que $r - r' < 1$. Mais quelle que soit la valeur de cette différence, en appliquant successivement le même raisonnement un nombre fini de fois, on arrive au résultat général cherché.

Dans notre cas $r' = 0$ et r doit être remplacé par $r - \rho$. On a ainsi

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r-\rho)}(b_n, x_0)}{n^\rho} = 0.$$

16. Regardons d'autre part $\varphi_2(x)$. N° 12 nous assure que

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(c_n, x_0) = \varphi_2(x_0),$$

car $\varphi_2(x)$ est holomorphe en x_0 et $\lim\limits_{n=\infty} n^{-r}c_n = 0$. Pour pouvoir descendre aux moyennes d'ordre inférieur, établissons le lemme suivant où, pour plus de simplicité, nous supposons que

$$\varphi_2(x_0) = 0.$$

Si $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(r)} = 0$, *on a nécessairement pour* $r' < r$

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{r'}}{n^{r-r'}} = 0.$$

Partons de la formule

$$S_n^{(r')} = \sum_{i=0}^{n} B_{n-i}^{(r'-r)} S_i^{(r)},$$

qu'on déduit facilement de la définition des $S_n^{(i)}$ et écrivons l'hypothèse que $s_n^{(r)}$ tend vers o sous la forme

$$\frac{S_n^{(r)}}{(n+1)^r} = \varepsilon_n.$$

On sait que

$$B_n^{(r'-r)} > \frac{C}{(n+1)^{r+1-r'}},$$

d'où, en posant $r - r' = \alpha$,

$$|S_n^{(r')}| < C\sum_{i=0}^{n} \frac{|\varepsilon_i|(i+1)^r}{(n-i+1)^{1+\alpha}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{|S_n^{(r')}|}{(n+1)^r} < C\left[|\varepsilon_n| + \frac{|\varepsilon_{n-1}|}{2^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{|\varepsilon_0|}{(n+1)^{1+\alpha}}\right].$$

Soit k la partie entière de $\frac{n}{2}$; il est évident que

$$|\varepsilon_n| + \frac{|\varepsilon_{n-1}|}{2^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{|\varepsilon_k|}{(n-k+1)^{1+\alpha}} < \varepsilon_\nu A,$$

où ε_ν est le plus grand des termes $|\varepsilon_n|$, $|\varepsilon_{n-1}|$, ..., $|\varepsilon_k|$ et

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Cette partie du crochet, comme ε_ν, tend donc vers o avec $\frac{1}{n}$. L'autre moitié

$$\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{(n-k)^{1+\alpha}} + \frac{|\varepsilon_k|}{(n-k+1)^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{|\varepsilon_0|}{(n+1)^{1+\alpha}} < B \sum_{i=n-k} \frac{1}{i^{1+\alpha}},$$

où B est le plus grand des $|\varepsilon_i|$. Mais le facteur de B est le reste d'une série convergente, car $n - k = \frac{n}{2}$ tend vers ∞ avec n. Nous avons donc démontré que

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(r')}}{n^r} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(r'+1)\, S_n^{(r')}}{n^{r'}} \frac{1}{n^{r-r'}} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r')}}{n^{r-r'}} = 0.$$

Dans notre cas, $r' = r - \rho$, de sorte que

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r-\rho)}(c_n, x_0)}{n^\rho} = 0.$$

Si l'on ajoute enfin que

$$\begin{aligned} s_n^{(r-\rho)}(a_n, x_0) = \mathrm{A}_q s_n^{(r-\rho)}(q, \rho) + \mathrm{A}_{q-1} s_n^{(r-\rho)}(q-1, \rho) + \ldots \\ + \mathrm{A}_0 s_n^{(r-\rho)}(0, \rho) + s_n^{(r-\rho)}(b_n, x_0) + s_n^{(r-\rho)}(c_n, x_0), \end{aligned}$$

et si l'on divise chaque membre par $n^\rho \log^q n$, on obtient le résultat (24). Le théorème proposé est complètement établi.

Inversement, *si les* $s_n^{(r-\rho)}(x_0)$, ou les moyennes arithmétiques d'ordre supérieur à $r - \rho$, *satisfont à* (24), *la partie dominante de la singularité est*

$$\frac{\mathrm{A}_q \log^q \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{x_0}}}{\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^\rho}.$$

Regardons en effet la fonction

$$f_1(x) = f(x) - \mathrm{A}_q \frac{\log^q \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{x_0}}}{\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Par hypothèse,

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r-\rho)}(b_n, x_0)}{n^\rho \log^q n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{S}_n^{(r-\rho)}(b_n, x_0)}{n^r \log^q n} = 0.$$

Appliquons le théorème de Cesàro aux deux fonctions

$$\frac{f_1(x, x_0)}{(1-x)^{r-\rho+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{S}_n^{(r-\rho)}(b_n, x_0) x^n$$

et

$$\frac{\log^q \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{x_0}}}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Nous savons que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{n^r \log^q n} = \frac{1}{\Gamma(r+1)};$$

par suite, que

$$\lim_{n=\infty} \frac{|S_n^{(r-\rho)}(b_n, x_0)|}{\alpha_n} = 0.$$

Le théorème de Cesàro nous donne, par conséquent,

$$\lim_{x=1} \frac{f(x, x_0)(1-x)^\rho}{\log^q \frac{1}{1-x}} = 0.$$

La partie dominante de la singularité, celle qui détermine l'ordre de grandeur de la fonction autour de ce point, est donc bien algébrico-logarithmique de degré (q, ρ) comme il fallait le démontrer.

17. Cette réciproque du théorème fondamental sur les points critiques algébrico-logarithmiques nous suggère un problème plus général. Les $s_n(x_0)$, par exemple, n'ont pas nécessairement un ordre d'infinitude aussi bien déterminé que dans les théorèmes précédents. Les modules des s_n peuvent avoir pour limite supérieure ∞ tout en ayant des points limites finies. Même si les modules ont une croissance bien déterminée, les arguments peuvent ne pas avoir une limite pour $n = \infty$. Mettons-nous dans le cas général. Dans quelles conditions est-ce que l'hypothèse

$$\limsup_{n=\infty} . |s_n| = \infty \tag{27}$$

a pour conséquence nécessaire

$$\lim_{x=1} |f(x)| = \infty, \tag{28}$$

du moins si l'on s'approche de 1 le long du rayon?

Dans les recherches de ce genre, c'est de l'influence des arguments des coefficients dont dérive la difficulté principale. En effet, si les coefficients sont positifs, (28) résulte *toujours* de (27), comme Abel l'a déjà démontré. D'autre part, les s_n de la fonction

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$$

sont $-1, +1, -2, +2, \ldots, -n, +n, \ldots$, de sorte que (27) est satisfait, la fonction a cependant la valeur $-\frac{1}{4}$ en 1.

Sans avoir l'intention d'épuiser le problème posé, nous allons établir quelques propositions pour mettre en évidence la nature de l'influence des arguments dans les questions semblables. Nous avons besoin pour cela de l'inégalité, facile à vérifier,

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|\rho_1 e^{i\alpha_1} + \rho_2 e^{i\alpha_2} + \ldots + \rho_n e^{i\alpha_n}|}{\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n} \geqq \cos\frac{\alpha}{2}, \tag{29}$$

où les nombres $\rho_k e^{i\alpha_k}$ se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine).

Soient données les fonctions

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n$$

et

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n,$$

où, du moins pour n assez grand, les $\rho_n e^{i\alpha_n}$ se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ et supposons que $\lim_{n=\infty} (\rho_0 + \rho_1 + \ldots + \rho_n) = \lim_{n=\infty} s_n = \infty$, ce qui entraîne, grâce au théorème d'Abel, que $\lim_{x=1} \varphi(x) = \infty$. En ajoutant un polynome à $f(x)$ on arrive à ce que *tous* les coefficients se trouvent dans l'angle α et un polynome divisé par $\varphi(x)$ tend vers 0 pour $x = 1$. Mais, dans ce cas, l'inégalité (29) nous dit que

$$\frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n} > B > 0,$$

où B est indépendant de x qui est supposé positif et < 1. Il en résulte que

$$\liminf_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n} > 0,$$

l'ordre de grandeur de $f(x)$ coïncide donc avec celui de $\varphi(x)$. En ce cas, les arguments n'ont pas d'influence sur le degré d'infinitude de la fonction.

Si l'on remplace la condition (27) par l'hypothèse plus restrictive

$$\lim_{n=\infty} |s_n| = \infty,$$

et que les s_n se trouvent, du moins pour n assez grand, dans l'angle $\alpha < \pi$, le même raisonnement, appliqué aux séries

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n,$$

nous montre que pour x assez proche de 1

$$\left| \frac{f(x)}{1-x} \right| > A\,\varphi(x).$$

Mais la comparaison des deux séries

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

et

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n,$$

par la méthode de Cesàro, nous assure que

$$\lim_{x=1} \frac{1}{1-x} \frac{1}{\varphi(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{|s_n|} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{x=1} |f(x)| = \infty.$$

21. Mais le cas le plus général et, en même temps, le plus compliqué est celui où les modules des s_n ne tendent pas directement vers l'infini et où les arguments des coefficients ne sont assujettis à aucune restriction. Supposons pour le moment que les coefficients soient réels et que

$$\text{(30)} \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{|a_n|}{n^k} = a < 1.$$

Si l'on a pour les s_n positifs

$$\limsup_{n=\infty} \frac{s_n}{n^{k+\frac{1}{2}}} = \infty,$$

et pour les s_n négatifs

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|s_n|}{n^k} = \mathrm{A},$$

A étant un nombre fini ou nul, *la fonction représentée par* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *devient infinie d'ordre supérieur à k au point* 1.

En effet, désignons le plus grand terme de la suite finie

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n$$

par $n^{k+\frac{1}{2}}\alpha_n$, dont nous savons que

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty.$$

Dans la suite finie considérée, prenons le terme qui diffère le moins de $n^{k+\frac{1}{2}}$; évaluons le nombre des termes p qui est indispensable pour parvenir de ce terme au terme maximum. D'après (30), p est plus grand que le plus petit nombre p' satisfaisant à la condition

$$n^{k+\frac{1}{2}} + (n-p')^k + (n-p'+1)^k + \ldots + (n-1)^k + n^k \geqq n^{k+\frac{1}{2}}\alpha_n,$$

car ici nous avons construit le terme maximum à l'aide de termes qui sont les plus grands possibles.

Cette inégalité peut s'écrire encore

$$(n-p')^k + (n-p'+1)^k + \ldots + (n-1)^k + n^k \geqq n^{k+\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1) = n^k n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1);$$

donc

$$p > n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1),$$

car le second membre est le produit de deux facteurs dont le premier est le plus grand terme du premier membre.

Construisons maintenant S_n.

D'après le raisonnement donné, le nombre des $s_i (i \leqq n)$ qui sont plus grands que $n^{k+\frac{1}{2}}$ est au moins $n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$; donc ils donnent une partie de S_n d'ordre plus élevé que $k+1$. Les autres termes positifs ne peuvent pas diminuer cet ordre, de même que les S_n négatifs, leur somme, en valeur absolue, étant inférieure à An^{k+1}. Nous avons donc démontré que

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{k+1}}{S_n} = 0.$$

Appliquons maintenant le théorème de Cesàro sur les deux fonctions

$$\frac{1}{(1-x)^{k+2}} = \sum_{n=0} h_n x^n$$

et

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum S_n x^n.$$

En remarquant que, d'après un théorème de M. Appell ([1]),

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{k+1}}{h_n} = \Gamma(k+1),$$

et que, par suite,

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{S_n} = 0,$$

on obtient

$$\lim_{x=1} \frac{\dfrac{1}{(1-x)^{k+2}}}{\dfrac{f(x)}{(1-x)^2}} = \lim_{x=1} \frac{1}{(1-x)^k f(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{h_n}{S_n} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Affranchissons-nous enfin de la restriction que les coefficients soient réels. Le théorème correspondant s'énonce :

Si l'on peut former des s_n deux groupes, de manière que tous les termes s_{n_1} du premier groupe se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine) et si pour ces termes

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} \frac{|s_{n_1}|}{n^{k+\frac{1}{2}}} = \infty,$$

([1]) Appell, *Sur certaines séries, etc.* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII).

et si, pour les autres termes s_{n_2},

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|s_{n_2}|}{n^k} = a,$$

a étant un nombre fini ou nul, *la fonction représentée par* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *devient infinie d'ordre supérieur à k au point* 1.

Tout ce qu'il faut ajouter au raisonnement précédent pour le démontrer, c'est que

$$|\Sigma s_{n_1} x^{n_1}| > \mathrm{A} \Sigma |s_{n_1}| x^{n_1},$$

pour x positif, inférieur et assez proche de 1 et que, d'autre part,

$$|\Sigma s_{n_2} x^{n_2}| < \frac{\mathrm{B}}{(1-x)^{k+1}}.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'établir la démonstration détaillée qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

CHAPITRE III.

LA MÉTHODE DE LA SOMMATION EXPONENTIELLE.

ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA SOMMATION DE M. BOREL ([1]).

1. L'emploi des moyennes arithmétiques d'ordre quelconque n'est pas sans restriction. Il exige que les coefficients de la série de Taylor étudiée soient à croissance finie, c'est-à-dire qu'il y ait un nombre k tel que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^k} = 0.$$

Dans le cas général où les coefficients ne sont plus assujettis à une telle condition, on doit donc s'adresser à des méthodes plus perfectionnées. Une autre exigence non moins importante est que la méthode cherchée soit simple pour pouvoir être utile dans les recherches théoriques et pratiques. La sommation exponentielle de M. Borel, qui consiste à remplacer les $s_n(x)$ par leurs *moyennes exponentielles*

$$\mathrm{B}(a, x) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{a^n}{n!},$$

satisfait, comme nous le verrons, à chacune des deux conditions.

Pour étudier les propriétés principales de ces moyennes, prenons une série numérique quelconque, réelle ou complexe,

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et formons les moyennes exponentielles correspondantes

$$(2) \qquad \mathrm{B}(a) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!},$$

([1]) *Voir* à ce sujet les *Leçons* si suggestives de M. Borel, *Sur les séries divergentes*. Paris, Gauthier-Villars, 1901. En particulier pour les références, p. 94.

où

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Si la série (1) est convergente et a pour somme s, on a

$$\lim_{a=\infty} \mathrm{B}(a) = s,$$

ce que nous exprimons en disant que la série (1) est sommable par les moyennes exponentielles.

En effet, dans ce cas,

$$s_n = s + \varepsilon_n;$$

d'où

$$\mathrm{B}(a) = s + \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

Mais, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}} = \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ce qui donne le résultat voulu.

D'autre part, il arrive réellement que la limite de $\mathrm{B}(a)$ pour $a = \infty$ existe sans que la série (1) soit convergente. La sommation par les moyennes exponentielles est donc plus puissante que la sommation ordinaire. Remarquons cependant que, quoique la sommation par les moyennes exponentielles réussisse souvent pour les séries dont les termes ne sont pas à croissance finie et que, par cela, elle paraisse plus générale que la sommation par les moyennes arithmétiques, il peut arriver pourtant que la suite

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n}$$

tende vers une limite pour $n = \infty$ et la limite de $\mathrm{B}(a)$ pour $a = \infty$

n'existe pas. C'est le cas de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3s}} x^{n^3}, \qquad -\frac{1}{3} < s < 0,$$

pour $x = 1$ ([1]).

2. Mettons nos moyennes exponentielles sous forme d'intégrale afin que nous puissions les étudier plus facilement. Soit

$$(3) \qquad s(a) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}.$$

On voit tout de suite que

$$B(a) - u_0 = \int_0^a \frac{d}{da}[e^{-a} s(a)]\, da = \int_0^a e^{-a}[s'(a) - s(a)]\, da;$$

ou bien, si l'on pose

$$u(a) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{a^n}{n!},$$

on a

$$s'(a) - s(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{n+1} - s_n}{n!} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{a^n}{n!} = u'(a),$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad B(a) - u_0 = \int_0^a e^{-a} u'(a)\, da.$$

On peut encore simplifier cette formule par une intégration par partie. En effet

$$(5) \qquad \int_0^a e^{-a} u'(a)\, da = [e^{-a} u(a)]_0^a + \int_0^a e^{-a} u(a)\, da,$$

et nous allons démontrer que si $B(a)$ ou, ce qui revient au même, si l'intégrale du premier membre a une limite pour $a = \infty$, il en est de même de l'intégrale du second membre et l'on a nécessairement

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} u(a) = 0.$$

([1]) Hardy, *The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, series II, vol. VIII, 1910, p. 286).

Nous établirons ainsi l'égalité

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-a}\,u'(a)\,da = -\,u_0 + \int_0^\infty e^{-a}\,u(a)\,da.$$

Pour démontrer la première partie de l'énoncé, supposons que la première des intégrales

$$\int_0^a e^{-a}\,u'(a)\,da, \qquad \int_0^a e^{-a}\,u(a)\,da,$$

ait une limite bien déterminée pour $a=\infty$ et que la seconde n'en ait pas, et montrons que cette hypothèse nous amène à une absurdité (¹). Posons à cet effet

$$e^{-a}\,u(a) = \varphi(a) = \varphi_1(a) + i\,\varphi_2(a).$$

Par hypothèse, la limite

$$\lim_{a=\infty}\int_0^a [\varphi(a)+\varphi'(a)]\,da$$

existe et la limite

$$\lim_{a=\infty}\int_0^a \varphi'(a)\,da = \lim_{a=\infty}\int_0^a \varphi_1'(a)\,da + i\lim_{a=\infty}\int_0^a \varphi_2'(a)\,da,$$

c'est-à-dire la limite de $\varphi(a)$ pour $a=\infty$ n'existe pas. Supposons pour fixer les idées que ce soit $\varphi_1(a)$ qui ne tende pas vers une valeur bien déterminée pour $a=\infty$ et supposons sa limite supérieure d'indétermination positive. On peut alors désigner deux suites de points α_n, β_n tendant vers l'infini et telles que

$$\lim_{n=\infty}\varphi_1(\alpha_n) = \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty}\varphi_1(\beta_n) = \mathrm{B} > \mathrm{A} \geqq 0.$$

Soit H une quantité positive inférieure à B — A. On voit aisément qu'on peut former des α_n et des β_n deux suites x_ν et $x_\nu+\delta_\nu$ où $x_\nu+\delta_\nu < x_{\nu+1}$ et telles que

$$\int_{x_\nu}^{x_\nu+\delta_\nu} \varphi_1'(a)\,da = \varphi_1(x_\nu+\delta_\nu) - \varphi_1(x_\nu) > \mathrm{H}.$$

(¹) Cette démonstration est due à M. Hardy, *Researches in the theory of divergent series and divergent integrals* (*Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XXXV, 1904, p. 31).

Si $\varphi_1(a)$ n'a qu'un nombre limité de zéros dans l'intervalle $(0, +\infty)$, on aura, pour a, c'est-à-dire pour n assez grand, $\varphi_1(a) > 0$: donc, *a fortiori*,

$$\int_{x_\nu}^{x_\nu+\delta_\nu} [\varphi_1(a) + \varphi'_1(a)]\, da > \text{H},$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que (7) existe.

Si $\varphi_1(a)$ a une infinité de zéros, on prend pour $x_\nu + \delta_\nu$ les mêmes β_ν et pour x_ν le plus grand zéro de $\varphi_1(a)$ inférieur à β_ν et l'on arrive à la même conclusion.

Passons à la seconde partie de notre remarque. Il est évident, d'après ce qu'on vient de lire, que $e^{-a}u(a)$ a certainement une limite pour $a = \infty$, étant donné qu'elle est la différence de deux expressions dont chacune tend vers une valeur bien déterminée pour $a = \infty$. De plus, si la limite ainsi mise en évidence était différente de 0, le raisonnement précédent montrerait que la limite de $\varphi(a)$ pour $a = \infty$ n'existe pas.

Si l'on ajoute enfin que

$$u(0) = u_0 = \int_0^\infty u_0\, e^{-a}\, da,$$

on obtient, grâce à l'équation (5), la formule définitive de M. Borel :

$$\lim_{a=\infty} \text{B}(a) = \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da. \tag{8}$$

3. Nous avons vu que l'intégrale (8) a toujours un sens quand $\text{B}(a)$ a une limite pour $a = \infty$. L'inverse n'a pas lieu nécessairement. La sommation par l'intégrale (8) est donc plus générale que la sommation par les moyennes exponentielles $\text{B}(a)$. Nous dirons que la série (1) est *sommable* (B) si l'intégrale (8) a un sens.

L'emploi de cette intégrale présente cependant des difficultés non sans analogie avec celles des séries simplement (et non absolument) convergentes. Pour y échapper, nous allons restreindre la généralité de l'intégrale (8) par l'introduction de la notion de sommabilité absolue. Nous dirons que la série (1) est *absolument sommable* (B) si chacune des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \frac{d^\lambda}{da^\lambda} u(a) \right| da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \infty) \tag{9}$$

a un sens. Il est évident qu'une série absolument sommable (B) est sommable (B) et qu'elle est aussi sommable par les moyennes exponentielles, B(a). En effet, la condition (9) montre, pour $\lambda = 0$, que l'intégrale (8) a un sens, et pour $\lambda = 1$, que l'intégrale (4), c'est-à-dire B(a), a une limite bien déterminée pour $a = \infty$. La sommabilité absolue (B) est donc la moins générale des trois sommabilités étudiées à présent.

Examinons brièvement l'effet de l'addition et de la soustraction d'un terme sur la sommabilité de la série (1). Il s'agit d'établir la relation de la sommabilité de la série (1) à celle de la série

$$(1') \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} + \ldots.$$

On voit facilement que la fonction qui correspond à $u(a)$ dans le cas de la nouvelle série (1′) est justement $u'(a)$, de sorte que l'équation (5), jointe à la remarque qui la suit, nous démontre la proposition : *si* (1′) *est sommable* (B), (1) *l'est aussi*, mais pas inversement. Comme les moyennes exponentielles B(a) s'expriment identiquement [*voir* (4)] par des intégrales de même espèce, il est démontré que *si* (1′) *est sommable par les moyennes exponentielles* B(a), (1) *l'est aussi*, mais pas inversement.

Supposons maintenant que (1′) soit absolument sommable (B). *Il en résulte encore que* (1) *est aussi absolument sommable* (B). Il suffit de démontrer pour cela que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, u(a) \,|\, da$$

a un sens lorsqu'on suppose que

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, u'(a) \,|\, da$$

en a un.

Mais

$$|\, u(a) \,| \leqq |\, u_0 \,| + \int_0^a |\, u'(a) \,|\, da$$

de sorte que si l'on pose

$$|\, u'(a) \,| = \varphi'(a), \qquad \varphi(a) = \int_0^a |\, u'(a) \,|\, d$$

on a

$$|\, u(a) \,| < |\, u_0 \,| + \varphi(a).$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\varphi(a)\,da$$

a un sens si l'on suppose que

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\varphi'(a)\,da$$

en a un, les fonctions φ et φ' étant positives.

Par hypothèse, ε étant donné arbitrairement, on peut fixer b tel que

$$\int_b^{b'} e^{-a}\varphi'(a)\,da < \varepsilon, \qquad b' > b;$$

a fortiori,

$$e^{-b'}\int_b^{b'} \varphi'(a)\,da = e^{-b'}[\varphi(b') - \varphi(b)) < \varepsilon.$$

Le nombre b étant ainsi fixé, on choisit un $b_1 > b$ tel que, pour $a > b_1$, on ait $e^{-b'}\varphi(b) < \varepsilon$. On aura ainsi, pour $b' > b_1$,

$$e^{-b'}\varphi(b') < 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}\varphi(a) = 0.$$

Mais

$$\int_0^{a} e^{-a}\varphi(a)\,da = \int_0^{a} e^{-a}\varphi'(a)\,da - [e^{-a}\varphi(a)]_0^a,$$

ce qui démontre la proposition.

En tout cas, si la somme de $(1')$ existe, désignons-le par s', la somme correspondantes de (1) existe aussi et l'on a l'égalité

$$(10) \qquad s = u_0 + s'.$$

Au cas de la troisième méthode, l'inverse est vrai aussi : *Si* (1) *est absolument sommable* (B), $(1')$ *l'est aussi.* En effet, la condition de la sommabilité absolue, l'existence des intégrales (9) pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, sont vérifiées pour $(1')$ lorsqu'elles sont vérifiées pour (1). En particulier, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a}u'(a)\,da$$

a un sens d'où l'on conclut, grâce à (5), que $e^{-a}\varphi(a)=\varphi_1(a)+i\varphi_2(a)$ a une limite bien déterminée pour $a=\infty$. Mais on peut voir facilement que cette limite ne peut être que zéro, ce qui établit de nouveau l'égalité (10). Supposons, en effet, que

$$\lim_{a=\infty}\varphi_1(a)=\mathrm{A}>0,$$

c'est-à-dire que, pour $a>b$,

$$\varphi_1(a)>\mathrm{A}'<\mathrm{A}.$$

Nous aurons

$$\int_b^{b'}\varphi_1(a)\,da>(b'-b)\,\mathrm{A}$$

et, contrairement à notre hypothèse, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\,u(a)\,da$$

n'aurait pas de sens.

4. Les séries absolument sommables (B) se rapprochent donc des séries absolument convergentes. On peut, dans une telle série, intervertir le rang d'un nombre limité de termes ou remplacer un certain nombre de termes consécutifs par leur somme, ou inversement remplacer un terme par une somme d'un nombre fini de termes sans altérer ni la sommabilité, ni la somme de la série.

Et les séries absolument sommables (B) sont vraiment dans le sens positif et dans le sens négatif du mot la généralisation des séries absolument convergentes.

1° *Une série absolument convergente est absolument sommable* (B).

2° *Il y a des séries simplement* (mais non absolument) *convergentes qui ne sont pas absolument sommables* (B).

La sommabilité absolue de M. Borel n'est donc pas la généralisation de la notion de la convergence; elle ne généralise que la notion de la convergence absolue.

Voici la démonstration de la première proposition. La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ étant supposée convergente, soit s sa somme. Le théorème de M. Cesàro nous montre que

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|) \frac{a^n}{n!} = s,$$

c'est-à-dire qu'en posant

$$\mathrm{U}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \frac{a^n}{n!}$$

on a, grâce à l'équation (4),

$$\lim_{a=\infty} \int_0^a e^{-a}\, \mathrm{U}'(a)\, da = s - |u_0|.$$

De même, de la convergence de la série $|u_\lambda| + |u_{\lambda+1}| + \ldots$, il résulte que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \frac{d^{\lambda+1}}{da^{\lambda+1}} \mathrm{U}(a)\, da$$

a un sens. On peut en conclure, comme précédemment, que

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}\, \mathrm{U}(a) = 0,$$

par conséquent que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\, \mathrm{U}(a)\, da$$

a aussi un sens.

Si l'on remarque enfin que

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \frac{d^\lambda}{da^\lambda} u(a) \right| da < \int_0^\infty e^{-a} \frac{d^\lambda}{da^\lambda} \mathrm{U}(a)\, da,$$

la première proposition est établie.

Pour démontrer la seconde, citons l'exemple de M. Hardy [1], où le terme général de la série, si $\sqrt{n}$ est entier, est

$$u_n = \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 25.

et les autres termes sont zéros. M. Hardy démontre que l'intégrale correspondante

$$\int_0^\infty e^{-a} \, | \, u(a) \, | \, da$$

n'a pas de sens.

Indiquons encore brièvement deux propriétés importantes de la sommation exponentielle. Si les deux séries Σu_n et Σv_n sont sommables (B) simplement, absolument, ou par les moyennes exponentielles et si leur somme est u, respectivement v, la série $\Sigma(au_n + bv_n)$ est sommable (B) simplement, absolument, ou par les moyennes exponentielles. La démonstration en est immédiate.

Si les deux séries Σu_n et Σv_n sont absolument sommables (B) et si l'on pose $w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0$, la série Σw_n est absolument sommable (B) et sa somme est uv. Comme nous ne nous servirons pas de ce théorème, nous renvoyons le lecteur aux *Leçons sur les séries divergentes* de M. Borel (p. 104), où l'on en trouve une démonstration élégante.

5. Passons maintenant à la série de Taylor. Nous allons démontrer deux propositions réciproques concernant la sommabilité d'une telle série,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{11}$$

En voici la première. *Si la série* (11) *est absolument sommable* (B) *pour* $x = x_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, *elle est absolument sommable* (B) *sur le segment entier* $(0, x_0)$. *De plus, cette somme est une fonction analytique de* x, *qui n'a pas de point singulier à l'intérieur du cercle ayant pour diamètre* $(0, x_0)$.

Pour chaque valeur de x, on a tout d'abord une $u(a)$ correspondante

$$u(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \frac{a^n}{n!} = \mathrm{F}(xa).$$

La transformation $a\rho = b$, si l'on pose après $x = \rho e^{i\theta_0}$, remplace les intégrales à considérer,

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \frac{d^\lambda}{da^\lambda} u(a, x) \right| da = x^\lambda \int_0^\infty e^{-a} \, | \, \mathrm{F}^{(\lambda)}(ax) \, | \, da$$

par les intégrales

$$\frac{x^\lambda}{\rho}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\rho}}\,|\,F^{(\lambda)}(b\,e^{i\theta_0})\,|\,db.$$

Par hypothèse, ces intégrales ont un sens pour $\rho = \rho_0$, et, pour $\rho < \rho_0$, elles ne diffèrent de ces dernières que dans le facteur $e^{-\frac{b}{\rho}} < e^{-\frac{b}{\rho_0}}$. La première partie du théorème est établie.

Pour démontrer la seconde, remarquons que, d'après le même raisonnement, les intégrales

$$\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{z}}\,|\,F^{(\lambda)}(b\,e^{i\theta_0})\,|\,db$$

ont toujours un sens quand

$$\left|e^{-\frac{b}{z}}\right| < b^{-\frac{\rho_0}{b}},$$

c'est-à-dire elles ont un sens pour les points z qui satisfont à la condition

$$\mathrm{R}\left(\frac{b}{z}\right) \geqq \frac{b}{\rho_0}.$$

Si l'on pose $x = ze^{i\theta_0}$, on voit que ce sont les points à l'intérieur du cercle de diamètre $(0, x_0)$ qui sont déterminés par cette condition. Il en résulte, en particulier, que l'expression

$$\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{z}}\,F(b\,e^{i\theta_0})\,db$$

détermine une fonction visiblement holomorphe de la variable z, par conséquent de la variable $x = ze^{i\theta_0}$ à l'intérieur du cercle considéré. Comme, d'autre part, le long du segment $(0, x_0)$, cette fonction coïncide avec la somme de la série sommable (11), elle est nécessairement le prolongement analytique de $f(x)$. Notre proposition est complètement démontrée. Remarquons cependant qu'il n'en résulte nullement que la série (11) soit absolument sommable (B) à l'intérieur de ce cercle.

Inversement, *si $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence du cercle c de diamètre* $(0, x_0)$, *la série* (11) *est absolument sommable* (B) *sur le diamètre du cercle, y compris son extrémité x_0.*

On peut tracer, par hypothèse, un cercle c' concentrique à c et de rayon $R' > \frac{|x_0|}{2}$ à l'intérieur duquel, de même que sur sa circonférence, $f(x)$ soit encore holomorphe. Soit (o', x'_0) le diamètre qui coïncide avec (o, x_0) à l'intérieur de c. Calculons la fonction $u(a, x)$ correspondante en se servant de la formule de Cauchy,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{f(z)\,dx}{z^{n+1}}.$$

On obtient

$$u(a, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!\,z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'}\frac{f(z)}{z}e^{\frac{ax}{z}}\,dz$$

et

$$e^{-a}\,u(a, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'}\frac{f(z)}{z}e^{a\left(\frac{x}{z}-1\right)}\,dz.$$

Supposons x choisi de telle façon que, lorsque z parcourt la circonférence c', on ait

(12) $$R\left(\frac{x}{z}\right) < 1 - \varepsilon$$

et soit M le module maximum de $\frac{f(z)}{z}$ sur c'. On a ainsi

$$e^{-a}\,|u(a, x)| < \frac{M}{2\pi}\int_{c'} e^{-a\varepsilon}\,|dz| = MR'\,e^{-a\varepsilon}.$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\,|u(a, x)|\,da$$

a un sens. Et, comme on le voit facilement, il en est de même des intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\left|\frac{d^\lambda}{da^\lambda}u(a, x)\right|\,da.$$

Explicitons maintenant la condition (12) : le point $z = \alpha + i\beta$ étant fixé, traçons la droite

$$R\left(\frac{x}{z}\right) = 1,$$

dont l'équation est, en posant $x = \xi + i\eta$,

$$\alpha\xi + \beta\eta - (\alpha^2 + \beta^2) = 0;$$

elle passe donc par z et elle est normale à la droite passant par z et par l'origine. Le point z étant fixé, la condition (12) est donc satisfaite par tous les points du plan x qui se trouve du même côté de cette droite que l'origine. Si z parcourt c', l'enveloppe des droites ainsi construites est une ellipse qui contient le segment $(0, x_0)$ à son intérieur. Le théorème est démontré.

Les deux dernières propositions déterminent exactement le domaine où la série considérée (11) est absolument sommable (B). Tout d'abord, *elle est absolument sommable* (B) *dans les points réguliers du cercle de convergence.* En effet, on peut tracer un cercle passant par l'origine qui contienne ce point régulier sans qu'aucun point singulier soit situé à l'intérieur ou sur la circonférence de ce cercle. Mais le domaine de sommabilité peut dépasser considérablement le cercle de convergence. Faisons, en effet, la construction suivante. Dans chaque direction $(0, x)$ prenons le premier point singulier et traçons la droite normale à $(0, x)$ passant par ce point singulier. En chaque point à l'intérieur du domaine, fermé ou ouvert, ainsi délimité, la série (11) est absolument sommable (B), car le cercle d'holomorphie existe pour chacun de ces points. Nous exprimons ce fait par l'énoncé : *la série* (11) *est absolument sommable* (B) *à l'intérieur du polygone de sommabilité.*

La première proposition nous assure enfin que la série de Taylor envisagée n'est pas absolument sommable (B) à l'extérieur du polygone. Sur le contour du polygone, correspondant à cet égard au cercle de convergenee, la sommabilité est douteuse.

L'ÉTUDE DE LA SÉRIE DE TAYLOR A COEFFICIENTS QUELCONQUES AUX POINTS SINGULIERS DU POLYGONE DE SOMMABILITÉ [1].

6. Nous avons vu que les moyennes exponentielles, c'est-à-dire les limites pour $a = \infty$, représentent bien la valeur de la fonction aux points réguliers du cercle de convergence, mais elles peuvent avoir une limite aussi dans d'autres points du cercle. Par exemple, soit x_0 un point singulier d'ordre négatif situé sur le cercle de

---

[1] *Voir* surtout le Chapitre III de notre *Essai* dans le *Journal de Mathématiques* 1909 et la *Note* citée des *C. R.*, t. 153, page 804.

convergence, ou sur un côté et non dans un sommet du polygone de sommabilié et soit $f(x_0)$ la valeur limite de $f(x)$ quand on s'approche de x_0.

On a nécessairement

$$\lim_{a=\infty} \mathrm{B}(a, x_0) = f(x_0). \tag{13}$$

Nous pouvons écrire, en effet,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

où $f_1(x)$ est d'ordre négatif sur le cercle entier du rayon $|x_0|$ et $f_2(x)$ est holomorphe en x_0. De plus, ce point se trouve à l'intérieur du polygone de sommabilité attaché à $f_2(x)$, car, ou bien x_0 est sur le cercle de convergence et alors la remarque est évidente, ou bien il se trouve sur un côté du polygone attaché à $f(x)$ et, dans ce cas, le contour du nouveau polygone coïncide avec celui du premier, sauf que le côté passant par x_0 est biffé.

Mais, d'après le théorème correspondant du Chapitre précédent, la série de Taylor, qui représente $f_1(x)$ à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$, converge encore en x_0,

$$\lim_{n=\infty} s'_n(x_0) = f_1(x_0)$$

et, *a fortiori*,

$$\lim_{\alpha=\infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s'_n(x_0) \frac{a^n}{n!} = f_1(x_0). \tag{14}$$

D'autre part, grâce au théorème fondamental de M. Borel, démontré dans le paragraphe précédent, les moyennes exponentielles relatives à $f_2(x)$ et formées en x_0, tendent, pour $a = \infty$, vers la limite bien déterminée $f_2(x_0)$, de sorte que

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s''_n(x_0) \frac{a^n}{n!} = f_2(x_0),$$

ce qui, joint à (14), nous donne

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} [s'_n(x_0) + s''_n(x_0)] \frac{a^n}{n!} = \lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{n!} = f(x_0).$$

Le théorème est démontré.

Si $f(x)$ est d'ordre négatif au point x_0 du cercle de convergence, elle a nécessairement une limite bien déterminée quand on s'approche d'un point quelconque d'un petit arc de cercle comprenant x_0 à son intérieur. Nous disons dans ce cas que la fonction limite de $f(x)$ existe pour cet arc; d'ailleurs, cette fonction limite est continue et à écart fini dans le cas considéré.

Supposons encore que la fonction limite existe pour un tel petit arc. On a le théorème :

Si la fonction limite de $f(x)$ est continue et à variation bornée en x_0, on a nécessairement

$$\lim_{a=\infty} B(a, x_0) = f(x_0).$$

Comme par hypothèse,

$$\lim_{x=x_0} \sup. |f(x)| \leqq A,$$

nous pouvons décomposer $f(x)$, grâce au lemme général de la séparation des singularités (p. 60), de telle façon qu'on ait

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où $\lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$ et $f_2(x)$ est holomorphe en x_0. D'ailleurs, la fonction $f_1(x) = f(x) - f_2(x)$, comme les fonctions f et f_2, est continue et à variation bornée sur un petit arc de cercle comprenant x_0 à son intérieur. Le théorème de la page 36 nous assure donc que la limite

$$\lim_{n=\infty} (b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_n x_0^n) = f_1(x_0)$$

existe et, *a fortiori*,

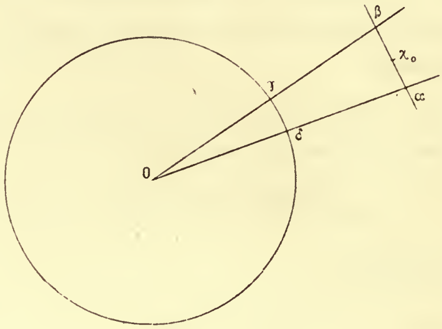
$$\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_n x_0^n) \frac{a^n}{n!} = f_1(x_0).$$

La démonstration s'achève, dès lors, comme celle du théorème précédent.

De même, si x_0 se trouve sur un côté (et non dans un sommet) du polygone de sommabilité. La série de Taylor qui représente

$f_1(x)$ autour de l'origine aura $|x_0|$ pour rayon de convergence, car, dans la décomposition de $f(x)$, on peut prendre pour chemin d'intégration le segment (α, β) d'une part, et la ligne $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$ de l'autre (*fig.* 5). Il suffit d'ajouter cette remarque au raisonnement

Fig. 5.



précédent pour démontrer le théorème en question. En résumé :

Les moyennes exponentielles ont une limite pour $a = \infty$ en chaque point du cercle de convergence ou du polygone de sommabilité (sommets exclus) *au voisinage duquel $f(x)$ a une fonction limite continue et à variation bornée.*

7. Si l'on ne suppose plus l'existence d'une fonction limite, on doit recourir aux moyennes exponentielles

$$B^{(1)}(a, x_0) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(1)}(x_0) \frac{a^n}{n!},$$

formées par les moyennes arithmétiques simples des $s_n(x_0)$.

Par le lemme fondamental de la décomposition de $f(x)$ (p. 60), joint aux théorèmes du numéro 4 du Chapitre II, on démontre facilement les théorèmes suivants :

Si à l'intérieur du cercle de convergence ou à l'intérieur du polygone de sommabilité

$$\lim_{x=x_0} f(x) = A,$$

on a nécessairement

$$\lim_{a=\infty} B^{(1)}(a, x_0) = A.$$

Plus généralement, *si à l'intérieur du cercle de convergence ou à l'intérieur du polygone de sommabilité,*

$$\limsup_{x=x_0} |f(x)| \leqq A,$$

on a nécessairement

$$\limsup_{a=\infty} |B^{(1)}(a, x_0)| \leqq A.$$

En résumé, la suite

$$\lim_{a=\infty} B^{(1)}(a, x_0), \tag{15}$$

formée en un point singulier du cercle de convergence ou du polygone de sommabilité (sommets exclus), nous décèle l'allure générale de la fonction en ce point, même si l'on ne fait aucune hypothèse sur les coefficients tayloriens qui définissent $f(x)$.

En effet, si la suite (15) a une limite bien déterminée, $f(x)$ en a de même pour $x = x_0$, du moins le long du rayon $(0, x_0)$. Si (15) n'a pas de limite, mais si elle est bornée en valeur absolue, $f(x)$ est indéterminée à l'intérieur du cercle ou du polygone au voisinage de x_0, et elle est bornée à ce voisinage. Enfin, si la limite supérieure pour $a = \infty$ de $|B^{(1)}(a, x_0)|$ est infinie, $f(x)$ devient infinie au voisinage de x_0.

Regardons de plus près le cas où (15) n'est pas bornée. Il en résulte, en particulier, que $|B(a, x_0)|$ n'est pas bornée non plus pour $a = \infty$. Nous allons voir que le degré d'infinitude de ces moyennes exponentielles simples pour $a = \infty$, et, *a fortiori*, celui de $B^{(1)}(a, x_0)$, est en relation directe avec le degré d'infinitude de $f(x)$ en x_0.

8. Pour cela, nous devons établir quelques propriétés relatives à la croissance des fonctions entières dont nous nous servons pour représenter la fonction donnée. Afin de montrer l'idée fondamentale de la méthode qui nous conduira à ces résultats, nous allons examiner tout d'abord la fonction exponentielle.

Soit donné

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

M. Borel [1] a remarqué que l'ordre de grandeur d'une fonction entière à coefficients positifs ne dépend pas également de tous les termes de la série; au contraire, si l'on n'exige pas une évaluation très précise, un ou quelques-uns de ces termes, qui s'éloignent d'ailleurs à l'infini pour $a = \infty$, donnent déjà l'ordre de grandeur de la fonction.

Nous allons développer cette idée pour évaluer exactement le degré d'infinitude de certaines fonctions entières à coefficients positifs.

Prenons k pour un nombre positif supérieur à 1, et désignons par b la partie entière de $\frac{a}{k}$, de sorte que

$$\frac{a}{k} = b + \eta,$$

où

$$0 \leqq \eta < 1.$$

La somme des b premiers termes du développement de e^a divisés par e^a tend vers zéro pour $a = \infty$.

En effet, pour un a quelconque, les deux plus grands termes de la série envisagée sont ceux dont les indices sont $a - 1$ et a; par suite,

$$\mathrm{A}(a) = 1 + \frac{a}{1!} + \ldots + \frac{a^b}{b!} < b\frac{a^b}{b!}.$$

Appliquons maintenant la formule de Stirling sous sa forme

$$(16) \qquad b! = \eta(b)(b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)},$$

où

$$\lim_{b=\infty} \eta(b) = \sqrt{2\pi}.$$

Nous avons

$$\frac{\mathrm{A}(a)}{e^a} < b \frac{a^b}{\eta(b)(b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)+a}}$$

et

$$(17) \qquad \frac{\mathrm{A}(a)}{e^a} < \frac{bk^b}{\eta(b)(b+1)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{a}{k}-\eta+1\right)+a}},$$

---

[1] E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 58.

car

$$a < k(b+1).$$

Examinons maintenant le quotient

$$\frac{k^b}{e^{a\frac{k-1}{k}}} = k^{-\eta}\frac{k^{\frac{a}{k}}}{e^{a\frac{k-1}{k}}}.$$

Pour que ce rapport tende vers zéro, il suffit que

$$\frac{k}{e^{k-1}} < 1,$$

ce qui est évident, étant donné que

$$e^{k-1} = 1 + k - 1 + \frac{(k-1)^2}{2!} + \ldots.$$

Posons

$$\frac{k^{\frac{1}{k}}}{e^{\frac{k-1}{k}}} = c,$$

dont nous savons que

$$0 < c < 1.$$

L'inégalité (17) peut donc s'écrire

$$\frac{A(a)}{e^a} < B(a)\,c^a,$$

où

$$\limsup_{a=\infty} \frac{B(a)}{a} = 0.$$

D'où l'on conclut que, r étant un nombre quelconque,

$$\lim_{a=\infty} \frac{a^r A(a)}{e^a} = 0. \tag{18}$$

9. Regardons de plus près les termes du développement e^a dont les indices sont supérieurs ou égaux à la partie entière de ak.

Je dis que la somme de ces termes divisée par e^a tend aussi vers zéro.

Désignons par b la partie entière de ak, de sorte que

$$ak = b + \eta,$$

ou

$$0 \leqq \eta < 1.$$

Écrivons la somme envisagée sous la forme

$$\mathrm{B}(a) = \frac{a^b}{b!}\left(1 + \frac{a}{b+1} + \frac{a}{b+1}\,\frac{a}{b+1} + \ldots\right),$$

et remarquons que

$$ka < b+1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b+1} < \frac{1}{k}$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{a}{b+i} < \frac{1}{k}.$$

D'où il résulte que

$$\mathrm{B}(a) < \frac{a^b}{b!}\,\frac{k}{k-1}.$$

Appliquons de nouveau la formule de Stirling sous la forme (16); nous aurons

$$\mathrm{B}(a) < \frac{k}{k-1}\,\frac{a^b}{\eta_1(b)(b+1)^{b+\frac{1}{2}}e^{-(b+1)}}$$

et

$$\frac{\mathrm{B}(a)}{e^a} < \frac{k}{k-1}\,\frac{1}{\eta_1(b)(b+1)^{\frac{1}{2}}k^b e^{-(ak-\eta_1+1)+a}},$$

car

$$a < \frac{b+1}{k}.$$

Démontrons que

$$\lim_{a=\infty} \frac{e^{a(k-1)}}{k^{ak}} = 0;$$

pour cela, il suffit que

$$\frac{e^{k-1}}{k^k} < 1.$$

On peut vérifier cette inégalité de la façon suivante : Écrivons-la sous la forme

$$e^{k-1} < k^k,$$

et prenons le logarithme des deux membres

$$(19) \qquad k - 1 < k \log k.$$

Il suffit évidemment de vérifier cette inégalité plus simple.

Au point $k=1$, toutes les deux fonctions de k,

$$k-1 \quad \text{et} \quad k \log k,$$

prennent la valeur zéro. Dans le point $k=e$, la fonction $k \log k$ est supérieure (de l'unité) à la fonction $k-1$. Donc, si, pour $k>1$, l'inégalité (19) cessait d'être vérifiée, la dérivée de la fonction

$$k \log k-(k-1)$$

devrait avoir une racine supérieure à 1. Mais cette dérivée est justement $\log k$. On peut donc poser

$$\frac{e^{k-1}}{k^k}=c$$

avec

$$c<1.$$

Par suite, nous concluons comme auparavant que, r étant un nombre quelconque,

$$\lim_{a=\infty} \frac{a^r \mathrm{B}(a)}{e^a}=0. \tag{20}$$

Ajoutons qu'on peut démontrer de la même manière que le terme maximum, et, par suite, la somme d'un nombre fini de termes divisée par e^a, tend aussi vers zéro. L'ordre de grandeur de e^a n'est donc déterminé que par un nombre toujours croissant de termes, et nous avons essayé de réduire le nombre des termes importants au strict minimum.

10. A l'aide de ces considérations, nous allons démontrer le théorème suivant :

Soit donnée la fonction entière

$$f(a)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n) a^n}{n!},$$

où

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^p}=\alpha, \tag{21}$$

p étant un nombre réel quelconque. *L'ordre de grandeur de la fonction $f(a)$ est déterminé d'une manière très précise par* l'équation

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^p e^a} = \alpha. \tag{22}$$

En effet, d'après la condition (21),

$$\varphi(x) = \alpha n^p + \varepsilon_n n^p$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Par suite,

$$f(a) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^p \frac{a^n}{n!},$$

et, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^p \frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!}} = \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Il suffit donc de déterminer l'ordre de grandeur de la fonction

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p a^n}{n!}.$$

Pour cela, nous allons étendre à cette fonction les résultats acquis tout à l'heure relatifs à la fonction exponentielle.

Regardons, tout d'abord, la somme $A'(a)$ des b premiers termes, b étant la partie entière de $\frac{a}{k}$ et $k > 1$. Une limite supérieure de ces termes est

$$b^p \frac{a^b}{b!};$$

donc

$$A'(a) < b^p A(a);$$

par suite encore, d'après (18),

$$\lim_{a=\infty} \frac{A'(a)}{e^a} = 0. \tag{23}$$

Prenons ensuite la somme $B'(a)$ des termes dont les indices sont égaux ou supérieurs à ka, et soit de nouveau b la partie entière de ka.

On a

$$B'(a) = \frac{a^b}{b!}\left[b^p + (b+1)^p \frac{a}{b+1} + (b+2)^p \frac{a}{b+1}\,\frac{a}{b+2} + \ldots\right].$$

Soit μ un entier plus grand que $|p|+1$ et laissons de côté les 4μ premiers termes de $B'(a)$. Cela est permis, car nous avons démontré que la somme d'un nombre fini de termes du développement de e^a divisé par e^a tend vers zéro, comme un nombre inférieur à 1, élevé à la puissance a.

Regardons maintenant le $(4\mu+1)^{\text{ième}}$ terme de la parenthèse en remplaçant p par le nombre plus grand μ. Ce terme est

$$\frac{a^{4\mu}(b+4\mu)^{\mu}}{(b+1)\ldots(b+2\mu)\ldots(b+4\mu)}.$$

Étant donné que, pour $r > 2\mu$,

$$b + 2\mu + r < (b+r)^2,$$

on a

$$\frac{b+4\mu}{(b+2\mu+r)(b+2\mu+r-1)} < 1,$$

de sorte que

$$\frac{(b+4\mu)^{\mu}}{(b+2\mu+1)\ldots(b+4\mu)} < 1.$$

On peut donc écrire

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!}\left(1 + \frac{a}{b+2\mu+1} + \frac{a}{b+2\mu+1}\,\frac{a}{b+2\mu+2} + \ldots\right)$$

et

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!}\,\frac{k}{k-1},$$

où

$$\lim_{a=\infty} \frac{P_{4\mu}(a)}{e^a} = 0.$$

Mais

$$\frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!} \leqq \frac{a^{4\mu}a^b}{b!},$$

d'où il résulte comme auparavant que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B'(a)}{e^a} = 0. \tag{24}$$

Il suffit donc, pour envisager l'ordre de grandeur de la fonction entière,

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!},$$

de considérer les termes dont les indices sont supérieurs à $\frac{a}{k}$ et inférieurs à ak, k étant un nombre supérieur à l'unité.

11. On voit ainsi facilement qu'en désignant cette partie du développement par $C'(a)$ et la partie correspondante du développement de e^a par $C(a)$, on a pour $p > 0$

$$\left(\frac{a}{k}\right)^p C(a) < C'(a) < (ak)^p C(a).$$

Donc

$$\limsup_{a=\infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a} = \limsup_{a=\infty} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{a^p e^a} \leqq k^p$$

et

$$\liminf_{a=\infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a} = \liminf_{a=\infty} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{e^a} \geqq \frac{1}{k^p},$$

car

$$\lim_{a=\infty} \frac{C(a)}{e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{e^a - A(a) - B(a)}{e^a} = 1.$$

Pour $p < 0$, la limite inférieure devient la limite supérieure et inversement.

Examinons enfin les points limites de la suite

$$\lim_{a=\infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a}.$$

Nous avons trouvé que tous les points limites sont entre $\frac{1}{k^p}$ et k^p. Je dis que le seul point limite est l'unité. En effet, soit x_0 un autre point limite de la suite ; je prends k assez voisin de 1 pour que

$$\left| 1 - \frac{1}{k^p} \right| < | 1 - x_0 |,$$

$$| k^p - 1 | < | 1 - x_0 |,$$

ce qui est toujours possible, étant donné que k peut être aussi voisin de l'unité qu'on veut.

Mais, dans ce cas. x_0 n'est pas entre $\frac{1}{k^p}$ et k^p; donc x_0 ne peut pas être un point limite de la suite envisagée.

On en conclut que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!}}{a^p e^a} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Plus généralement

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=\frac{k}{a}}^{ka} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=1}^{\infty} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}} = 1. \tag{25}$$

En effet, dans les inégalités fondamentales (23) et (24), p est un nombre quelconque. Prenons le supérieur à $\rho > 0$ et remarquons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\rho (\log n)^q \frac{a^n}{n!} > e^a.$$

On voit que l'égalité (25) est démontrée.

D'autre part,

$$\frac{a^\rho}{k^\rho}\left[\log \frac{a}{k}\right]^q \sum_{n=\frac{a}{k}}^{ka} \frac{a^n}{n!} < \sum_{n=\frac{a}{k}}^{ka} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!} < k^\rho a^\rho [\log ka]^q \sum_{n=\frac{a}{k}}^{ka} \frac{a^n}{n!},$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{a=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}}{e^a a^\rho [\log a]^q} \leqq$$

et

$$\liminf_{a=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}}{e^a a^\rho [\log a]^q} \geqq \frac{1}{k^\rho},$$

car

$$\lim_{a=\infty} \frac{[\log a \pm \log k]^q}{[\log a]^q} = 1.$$

d'où, k étant aussi voisin de l'unité que l'on veut,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho}[\log n]^{q} \frac{a^n}{n!}}{e^a a^{\rho}[\log a]^{q}} = 1.$$

On entrevoit donc facilement que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B^{q,\rho}(a, 1)}{a^{\rho}[\log a]^{q}} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{26}$$

12. Ces calculs effectués, nous pouvons établir facilement le théorème suivant [1] :

Si, au point x_0 situé sur le cercle de convergence ou sur le polygone de sommabilité (sommets exclus), *$f(x)$ est de la forme déjà examinée,*

$$f(x) = \frac{P_q\left(\log \frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right)}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{\rho}} + f_1(x), \tag{27}$$

on a

$$\lim_{a=\infty} \frac{B(a, x_0)}{a^{\rho}(\log a)^{q}} = \frac{A_q}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{28}$$

Comme auparavant, $P^q(z)$ est un polygone en z de degré q, A^q le coefficient de z^q et $f_2(x)$ est d'ordre $\rho' < \rho$ au point x_0.

D'après la dernière hypothèse,

$$f_1(x) = f_2(x) + f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

où $f_2(x)$ est régulière à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ et d'ordre $\rho' + \varepsilon < \rho$ sur la circonférence; $f_3(x)$ est régulier au point x_0. Par suite, les sommes exponentielles de $f_3(x)$ formées en x_0 tendent vers $f_3(x_0)$ et, divisées par une quantité qui tend vers l'infini, deviennent 0.

D'autre part, les $s_n(c_n, x_0)$, formées pour la fonction $f_2(x)$ au

---

(1) P. et V. Dienes, *loc. cit.*, p. 409.

point x_0, satisfont à la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(c_n, x_0)}{n^\rho} = 0. \tag{29}$$

En effet,

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n z^n;$$

exprimons maintenant que son ordre sur le cercle de rayon 1 (au plan des z) est $\rho' + \varepsilon < \rho$. On aura

$$\lim_{n=\infty} \sup. \frac{\log |b_n x_0^n|}{\log n} = \rho' + \varepsilon - 1 < \rho - 1.$$

Donc, pour n assez grand,

$$|b_n x_0^n| < n^{\rho - 1 - \varepsilon'},$$

ε' étant arbitrairement petit. Ce qui montre immédiatement que, pour n assez grand,

$$s_n(c_n, x_0) = |b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_n x_0^n| < n^{\rho - \varepsilon'},$$

comme il fallait le démontrer.

Formons les sommes

$$B(c_n, a, x_0) = \frac{\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} s_n(c_n, x_0) \frac{a^n}{n!}}{e^a};$$

on a

$$B(c_n, a, x_0) < \frac{P(a) + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho-\varepsilon'} \frac{a^n}{n}}{e^a}$$

$P(a)$ étant un polynome.

Mais nous avons vu que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho-\varepsilon'} \frac{a^n}{n!}}{a^\rho e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho-\varepsilon'} \frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^\rho \frac{a^n}{n!}} = 0,$$

d'où enfin

$$\lim_{a=\infty} \frac{B(c_n, a, x_0)}{a^\rho} = 0.$$

Les sommes exponentielles de la fonction envisagée sont

$$B(a, x_0) = A_q B^{q,\rho}(a, x_0) + B(c_n, a, x_0) + B(d_n, a, x_0),$$

donc, d'après (26) et (29),

$$\lim_{a=\infty} \frac{B(a, x_0)}{a^\rho [\log a]^q} = \frac{A_q}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{30}$$

C'est la relation générale cherchée entre les points critiques algébrico-logarithmiques situés sur le polygone de sommabilité, d'une part, et les coefficients tayloriens qui figurent dans $B(a, x_0)$, *de l'autre.*

On voit sans difficulté que la formule (27) contient, comme cas particuliers, les pôles, les points critiques logarithmiques, les pôles logarithmiques, les points critiques algébriques et les points algébrico-logarithmiques, sans qu'elle soit épuisée par les singularités énumérées. Nous remarquons que, tout en satisfaisant aux conditions indiquées, le point x_0 peut être situé même sur une ligne singulière. Au fond, il ne s'agit que de la partie dominante de la singularité, c'est-à-dire de la partie qui montre de quelle manière la fonction devient infinie au point envisagé.

13. Le théorème général démontré précédemment est valable pour une série de Taylor quelconque, définissant une fonction analytique, mais il a le défaut de ne s'appliquer qu'aux points singuliers situés sur le cercle de convergence ou sur le polygone de sommabilité ; par contre, il a une remarquable simplicité, grâce à l'idée ingénieuse de M. Borel, d'employer pour fonction sommatrice la fonction exponentielle e^x. Il ne nous reste qu'à chercher à étendre le champ où peuvent être situés les points singuliers de la nature indiquée, pour qu'ils puissent être atteints par une méthode analogue à la précédente et dans la généralité et dans la simplicité. Une pareille généralisation nous est fournie immédiatement par la sommation exponentielle généralisée de M. Borel ([1]), où l'on prend pour fonction sommatrice e^{a^r} au lieu

---

([1]) E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 129, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

de e^a, c'est-à-dire où la fonction $f(x)$ est représentée, dans un domaine assez étendu, par la formule

$$f(x) = \lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}(x_0)\frac{a^{rn}}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Soit x_0 un point singulier de la fonction envisagée où elle s'écrit sous la forme (27). Faisons une supposition analogue à celle qui exige que le point singulier en question ne coïncide pas avec un sommet du polygone de sommabilité, c'est-à-dire supposons que x_0 ne soit exclu du domaine de sommabilité d'ordre r que par l'effet de la singularité à ce point. Plus précisément, supposons que le domaine de sommabilité d'ordre r de $f_3(x)$ contienne déjà x_0 à son intérieur. Dans des cas pareils, nous dirons que x_0 est atteint par cette sommation.

Dans ces conditions, on peut refaire le raisonnement précédent qui nous a conduit à la relation (30). Il ne faut que calculer les sommes exponentielles généralisées d'ordre r de la fonction

$$\frac{\left[\log\dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho},$$

au point 1.

Par définition, cette somme s'écrit

$$B_r^{q,\rho}(a, 1) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{q,\rho}\frac{a^{rn}}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Mais la relation (21) du Chapitre II montre que sa croissance est égale à celle de

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}[rn]^\rho[\log rn]^q\frac{a^{rn}}{n!}}{\Gamma(\rho+1)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Posons $a^r = b$ et prenons $\log n$ au lieu de $\log n + \log r$; nous aurons à examiner ainsi la croissance de

$$\frac{r^\rho \sum_{n=1}^{\infty} n^\rho (\log n)^q \frac{b^n}{n!}}{\Gamma(\rho+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}},$$

de sorte que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r^{q,\rho}(a,1)}{b^\rho[\log b]^\rho} = \frac{r^\rho}{\Gamma(\rho+1)},$$

ou bien, en remplaçant b par a^r,

$$(31) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{B_r^{q,\rho}(a,1)}{a^{r\rho}(\log a)^q} = \frac{r^{\rho+q}}{\Gamma(\rho+1)}.$$

On démontre maintenant la relation générale cherchée par une méthode identique à celle dont nous nous sommes servis précédemment. La formule

$$(32) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{B_r(a,x_0)}{a^{r\rho}(\log a)^q} = \frac{r^{\rho+q}}{\Gamma(\rho+1)} A_q$$

est la généralisation de (30) avec lequel elle coïncide d'ailleurs pour $r = 1$.

On voit par la dernière formule que les sommes exponentielles généralisées $B_r(a, x_0)$, *formées en un point singulier atteint par la méthode, sont en relation simple avec la structure de la singularité, dont elles permettent de déterminer la partie dominante.*

Dans la notation introduite par M. Borel [1], nous pouvons exprimer le résultat comme il suit:

Si la croissance de la fonction est

$$\rho + q_{\frac{1}{\omega_1}},$$

celle des sommes exponentielles généralisées d'ordre r *est*

---

[1] E. Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, Chap. I. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

r fois plus grand; en effet,

$$\left[\rho + q\frac{1}{\omega}\right] r = \rho r + q\frac{1}{\omega} r,$$

et le second membre de la dernière égalité est le symbole de la croissance de

$$a^{r\rho}(r \log a)^q$$

pour $a = \infty$.

On sait que la portée des sommes exponentielles généralisées peut effectivement surpasser celle des sommes exponentielles simples. Par exemple, si l'ensemble des points singuliers de la fonction n'a d'autres points limites que l'infini, ou s'il ne contient qu'un nombre fini de points, les points qui peuvent être atteints par la méthode, comme l'a montré M. Borel, sont aussi près qu'on veut d'un point quelconque du plan complexe. D'autre part, la relation (32), quoique plus compliquée que (30), ne laisse pas beaucoup à désirer en ce qui concerne la simplicité.

Ce que nous avons encore à faire dans cette direction, c'est de nous affranchir le plus complètement possible des restrictions relatives à la situation de la singularité étudiée. Comme, pour étudier un point singulier, nous avons besoin d'une représentation de la fonction dans des points réguliers tendant vers le point en question, et comme toutes ces représentations se font par des fonctions entières (ou polynomes), c'est-à-dire par des fonctions uniformes, il est impossible que le même développement permette de soumettre à ces recherches le plan complexe entier.

Une autre exigence, la simplicité des résultats, rend nécessaire un choix définitif entre les représentations connues, surtout si l'on veut examiner des singularités moins simples. Nous allons montrer dans les Chapitres suivants qu'il y a des méthodes qui satisfont à toutes ces exigences.

CHAPITRE IV.

L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS PAR LA MÉTHODE DE M. MITTAG-LEFFLER.

1. Nous avons vu dans le Chapitre précédent que les singularités situées en dehors du polygone de sommabilité ne se trouvent plus à la portée de la méthode exponentielle pour pouvoir étudier les points singuliers qui ne sauraient être atteints par cette sommation, nous devons tout d'abord pousser plus loin la représentation des fonctions analytiques afin d'arriver à des domaines d'holomorphie de plus en plus étendus. D'autre part, comme notre but est d'examiner la relation entre l'allure de la représentation en un point singulier et l'allure de la fonction au voisinage de ce même point, de chercher des développements qui *représentent* pour ainsi dire même les singularités, notre choix doit se porter sur la représentation où cette correspondance entre formule et fonction est la plus simple possible.

Mais, pour arriver à des résultats précis, il faut distinguer assez nettement les deux côtés du problème ainsi formulé. En effet, l'allure de la fonction au voisinage d'un point singulier peut avoir deux sens bien différents. D'abord la fonction peut tendre vers une valeur bien déterminée quand on s'approche de ce point sur une ligne ou à l'intérieur d'un domaine de forme déterminée; elle peut être bornée dans le domaine envisagé ou bien elle peut y devenir infinie, etc. Ce sont des allures générales où l'on ne spécialise pas davantage la nature de la singularité et nous savons qu'en beaucoup de questions de l'analyse, ce sont justement ces distinctions-ci qui jouent le rôle prépondérant.

D'autre part, on peut se demander comment les singularités toutes particulières, comme un pôle, un point critique algébrique ou logarithmique, un point essentiel, etc., dont le nombre est d'ailleurs très limité, se manifestent dans l'allure générale de la représentation au point considéré. Dans l'étude de la correspondance entre formule et fonction, on doit donc distinguer la correspondance entre la formule et l'allure générale de la fonction de la correspondance entre la formule et les singularités particulières de la fonction étudiée. Les deux problèmes ainsi séparés impliquent des difficultés bien distinctes.

Nous commencerons l'exposé des recherches de ce genre par l'étude des représentations moins compliquées et valables dans l'étoile ordinaire pour arriver après, dans le dernier Chapitre, aux représentations très générales dont la souplesse dérive de l'introduction d'un paramètre et d'une courbe arbitraire génératrice de l'étoile curviligne correspondante.

Nous verrons que les résultats relatifs aux singularités particulières, pôles, points critiques algébriques ou algébrico-logarithmiques, obtenus par la méthode que nous allons exposer, seront complets et précis, et que, par contre, l'allure générale de la fonction, au moins dans l'état actuel de ces recherches, ne se révèle pas très nettement dans ces représentations.

LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA SOMMATION DU TYPE $E(a)$.

2. Nous allons tout d'abord généraliser, avec M. Mittag-Leffler [1], la sommation exponentielle, de façon que les moyennes ainsi définies représentent la fonction étudiée dans l'étoile entière.

Prenons à cet effet l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(xy)}{y-1}\,E\left(\frac{a}{y}\right)dy,$$

où $E(x)$ est une fonction entière telle que $E(0)=1$ et S est le contour d'une aire simplement connexe dans laquelle, frontière comprise, $f(xy)$ est holomorphe. S doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y=1$ et $y=0$.

Dans ces conditions, l'intégrale considérée est égale à la somme de deux autres ayant pour chemin d'intégration une petite courbe

---

[1] M. MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène*, 5e Note. (*Acta math.*, t. XXIX, 1905).

autour de o, respectivement autour de 1,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy + \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy.$$

Mais pour $y=1$, le résidu de la fonction sous le signe $\int$ est $f(x)\mathrm{E}(a)$, de sorte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy - \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy = f(x)\,\mathrm{E}(a).$$

Calculons, d'autre part, le résidu pour $y=0$ de la même fonction. Posons

$$\mathrm{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

et nous aurons

$$\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n a^n}{y^n}.$$

Comme cette série converge uniformément sur le petit cercle (o), on peut la multiplier par $\dfrac{f(xy)}{1-y}$ et effectuer l'intégration terme à terme sur la série ainsi obtenue :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n a^n}{y^n}\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x)y^n\right)dy,$$

où $s_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ de façon que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy = -\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,c_{n+1}\,a^{n+1},$$

et

$$f(x) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,c_{n+1}\,a^{n+1}}{\displaystyle 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\,a^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i\,\mathrm{E}(a)}\int_S \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy.$$

Pour arriver à notre but, il ne nous reste que chercher des fonctions entières $\mathrm{E}(x)$ telles que

$$(1) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{1}{\mathrm{E}(a)}\int_S \frac{f(xy)}{y-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{y}\right)dy = 0.$$

Soit D un domaine fini de x, situé entièrement à l'intérieur de l'étoile attachée à $f(x)$, et soit $E(x)$ une fonction entière à coefficients positifs, telle que, θ satisfaisant aux inégalités

$$\varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \varepsilon,$$

on ait d'une manière uniforme

$$\lim_{\rho=\infty} E(\rho e^{i\theta}) = 0. \tag{2}$$

Nous allons montrer que toute fonction entière, assujettie aux conditions indiquées, satisfait déjà l'égalité (1); l'expression considérée dans (1) tend uniformément vers 0 pour le domaine D. Il suffit pour cela que l'on ait, d'une manière uniforme,

$$\lim_{a=\infty} \frac{E(ax)}{E(a)} = 0, \tag{3}$$

en tant que x appartient à un domaine fini, situé en dehors de la partie de l'axe réel entre 1 et $+\infty$; c'est le contour d'un tel domaine que décrit $\frac{1}{y}$ quand y parcourt la courbe S. D'autre part, D étant fixé, on peut prendre S, assez près du segment (0, 1) pour que xy reste à l'intérieur de l'étoile quand y varie sur S et x dans D. Ainsi la fonction

$$\frac{f(xy)}{1-y}$$

a un module maximum H et l'on a

$$\frac{1}{E(a)}\left|\int_S \frac{f(xy)}{1-y} E\left(\frac{a}{y}\right) dy\right| < \frac{Hl \text{ Max de } \left|E\left(\frac{a}{y}\right)\right|}{E(a)},$$

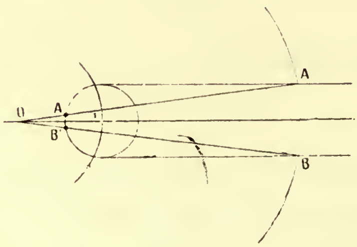
où l est la longueur du contour S et y est tel que le module de $E\left(\frac{a}{y}\right)$ prend sa plus grande valeur sur ce contour à ce point. Il nous reste donc à démontrer l'égalité (3).

Remarquons pour cela qu'on peut toujours tracer un cercle de rayon suffisamment grand, en particulier plus grand que l'unité, pour que le domaine entier soit intérieur à ce cercle.

Entourons, d'autre part, le segment $1 - +\infty$ d'une bande assez étroite AA'B'B, de façon que le domaine dont le contour est décrit par $\frac{1}{y} = x$ soit à l'extérieur de cette bande.

Partageons ce domaine en deux parties : l'une A_1 extérieure à l'angle AOB, l'autre A_2 intérieure à A'OB'.

Fig. 6.



Par hypothese, en choisissant ε plus petit que l'angle AOx, d'après (2),

$$\lim_{\omega=\infty} E(\omega x) = 0$$

d'une manière uniforme, quand x varie dans A_1, car avec x la quantité ωx est aussi intérieure à l'angle AOB. *A fortiori*

$$\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$$

tend uniformément vers 0 pour $\omega = +\infty$ dans toute aire finie extérieure à l'angle AOB, en particulier dans le domaine A_1.

Envisageons maintenant A_2, c'est-à-dire la partie de A qui est située dans l'aire limitée par OA', OB' et par l'arc du cercle A'B'.

Le plus grand module de x dans A_2 est le module de A' (ou celui de B'), de sorte que dans ce domaine

$$|x| < \overline{OA'} = b < 1.$$

D'où il résulte que

$$|E(\omega x| < E(\omega b),$$

car les coefficients de $E(x)$ sont positifs.

Ou encore

$$\frac{|E(\omega x)|}{E(\omega)} < \frac{E(\omega b)}{E(\omega)}$$

pour un x quelconque pris de A_2.

Appliquons maintenant le théorème de Cesàro, généralisé pour les fonctions entières, aux deux fonctions

$$E(\omega b) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b^n \omega^n$$

et

$$E(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \omega^n.$$

On obtient

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega b)}{E(\omega)} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n b^n}{\alpha_n} = 0,$$

car $b < 1$.

D'où l'on conclut que

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega x)}{E(\omega)} = 0,$$

d'une manière uniforme dans l'aire $A'OB'$.

On arrive ainsi au théorème fondamental de M. Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions analytiques dans l'étoile,

$$(4) \qquad f(x) = \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) c_{n+1} a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n}.$$

La convergence vers $f(x)$ est uniforme pour un domaine fini D quelconque de x à l'intérieur de l'étoile.

La fonction entière à coefficients positifs

$$E(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$$

est nommée fonction entière *sommatrice*. Toute fonction entière à coefficients positifs satisfaisant à la condition (3) est une fonction sommatrice. Par exemple, M. Lindelöf montre que

$$L_\beta(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n} \qquad (\beta > 1)$$

satisfait à (3).

Plus généralement, la méthode de M. Lindelöf [1] prouve que

---

[1] E. Lindelöf, *Calcul des résidus*, p. 121.

toute fonction entière à coefficients positifs peut servir pour fonction sommatrice, si les coefficients tayloriens peuvent s'écrire

$$c_n = \varphi(n),$$

où $\varphi(n)$ est holomorphe à droite de l'axe imaginaire, de même que sur cet axe et si, ε étant aussi petit qu'on veut, on a pour ρ assez grand,

$$|\varphi(\rho e^{i\psi})| < e^{\varepsilon\rho}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Nous désignons les expressions

$$M(x, a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) c_{n+1} a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} \qquad (a \to \infty)$$

par « moyennes des $s_n(x)$ du type $E(a)$ ».

3. Soit x_0 un sommet de l'étoile attachée à $f(x)$ et regardons la suite

$$M(x_0, a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) c_{n+1} a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n}.$$

Le théorème d'Abel correspondant manque ici, c'est-à-dire que, si nous supposons que cette suite tende pour $a = \infty$ vers une limite bien déterminée, nous ne savons pas si l'on peut en conclure que $f(x)$ tend vers une valeur $f(x_0)$, en s'acheminant vers x_0 sur le rayon (Ox_0), ou peut-être à l'intérieur d'un domaine entourant ce segment.

Mais la réciproque est vraie. *Si, à l'intérieur du triangle abO dont le côté arbitrairement petit ab est un arc du cercle de rayon $|x_0|$, la fonction étudiée $f(x)$ n'a pas de points singuliers, et si à l'intérieur de ce domaine, c'est-à-dire pour chaque chemin aboutissant à x_0 et situé entièrement dans ce triangle,*

$$\lim_{x=x_0} f(x) = A,$$

on a nécessairement

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_0 + s_1(x_0) + \ldots + s_n(x_0)}{n+1} c_{n+1} a^{n+1}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} = \mathrm{A}.$$

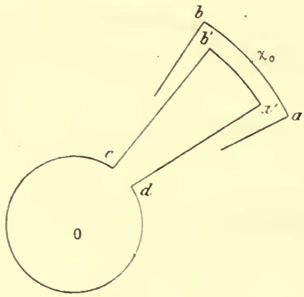
La démonstration de ce théorème repose sur la généralisation immédiate de notre lemme sur la séparation de la singularité (p. 60).

En prenant pour chemin d'intégration de l'intégrale de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - x} dz,$$

la courbe $a' b' c d a'$ où l'arc de cercle (cd) est situé à l'intérieur du cercle de convergence de la série de Mac Laurin (*fig.* 7), on

Fig. 7.



peut refaire, sans aucune difficulté, le raisonnement qui nous a conduit au lemme important. Il en résulte que si $f(x)$ satisfait les conditions énumérées dans le théorème précédent, ou plus généralement si elle est holomorphe à l'intérieur du triangle arbitrairement petit $ab\mathrm{O}$ et si à l'intérieur du triangle

$$\lim_{x=0} |f(x)| \leqq \mathrm{A},$$

on peut décomposer $f(x)$ de façon qu'on ait

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ et

$$\lim_{n=\infty} b_n x_0^n = 0;$$

d'autre part, $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ est holomorphe le long du rayon $(0, x_0)$, extrémité comprise.

Cela posé, formons les moyennes $M_1(x_0, a)$ du type $E(a)$ des moyennes arithmétiques des $s_n(x_0)$ et démontrons tout d'abord que si les moyennes arithmétiques des $s''_n(x_0) = d_0 + d_1 x_0 + \ldots + d_n x^n$ sont désignées par $\sigma''_n(x_0)$, on a

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma''_n(x)\, c_{n+1} a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} = f_2(x_0). \tag{5}$$

En effet, x_0 se trouve à l'intérieur de l'étoile attachée à $f_2(x)$, on peut donc développer $f_2(x)$ autour de x_0. Posons donc

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (x - x_0)^n = g_0 + g_1(x - x_0) + f_3(x),$$

et l'on voit immédiatement que la fonction

$$\int_0^x \frac{f_3(x x_0)}{(1 - x)^2}\, dx$$

est holomorphe au point 1. D'autre part, le développement de cette fonction autour de 0 nous donne

$$\frac{1}{x} \int_0^x \frac{f_3(x x_0)}{(1 - x)^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s'''_0 + s'''_1(x_0) + \ldots + s''_n(x_0)}{n + 1} x^n.$$

Comme le point 1 se trouve à l'intérieur de l'étoile attachée à la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1 - x}{x} \int_0^x \frac{f_3(x x_0)}{(1 - x)^2}\, dx = \sigma_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma''_n(x_0) - \sigma'''_{n-1}(x_0)] x^n,$$

on peut appliquer à cette série la méthode des moyennes du type $E(a)$ et l'on obtient ainsi l'égalité

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n'''(x_0)\, c_{n+1}\, a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} = \varphi(1) = 0.$$

D'autre part, les s_n de la fonction

$$g_0 + g_1(x - x_0) = g_0 + g_1 x_0 + g_1 x$$

formées pour le point $x = x_0$ sont tous égaux à g_0; par conséquent, il en est de même de leurs moyennes arithmétiques. Donc

$$\sigma_n''(x_0) = g_0 + \sigma_n'''(x_0),$$

ce qui montre enfin que

$$(6) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n''(x_0)\, c_{n+1}\, a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} = g_0 + \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n'''(x_0)\, c_{n+1}\, a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} = g_0 = f_2(x_0),$$

comme il fallait le démontrer.

Remarquons, pour finir, qu'on peut appliquer notre théorème du Chapitre II à la série de Taylor,

$$F_1(x\, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n x^n.$$

En effet, cette série a pour rayon de convergence l'unité et, à l'intérieur du cercle,

$$\lim_{x=1} F_1(x) = f_1(x_0).$$

Nous sommes donc sûrs que

$$\lim_{n=\infty} \sigma'_n(x_0) = f_1(x_0),$$

et que, *a fortiori*,

$$(7)\qquad \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma'_n(x_0)\, c_{n+1}\, a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} = f_1(x_0).$$

Enfin les deux résultats (6) et (7) réunis nous donnent

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} [\sigma'_n(x_0) + \sigma''_n(x_0)]\, c_{n+1}\, a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n}$$

$$= \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x_0)\, c_{n+1}\, a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} = f_1(x_1) + f_2(x_0) = f(x_0).$$

Le théorème est démontré.

On démontre de même que, *si à l'intérieur du triangle arbitrairement petit, abO, $f(x)$ n'a pas de points singuliers et si, à l'intérieur de ce domaine,*

$$\limsup_{x=x_0} |f(x)| \leqq \mathrm{A},$$

on a nécessairement

$$\limsup_{a=\infty} \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x_0)\, c_{n+1}\, a^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n} \right| \leqq \mathrm{A}.$$

En somme, si l'on part de la rep ésentation pour arriver à la fonction, les résultats ont plutôt la forme négative. En effet, tout ce que nous pouvons dire dans ce cas, c'est que si, pour $a = \infty$, l'expression $\mathrm{M}_1(x_0, a)$ ne tend vers aucune valeur limite, la fonction n'a pas une limite bien déterminée dans le voisinage triangulaire; si pour $a=\infty$ l'expression $|M_1(x_0, a)|$ n'est pas bornée, la fonction ne l'est pas non plus dans le voisinage triangulaire.

L'ÉTUDE D'UNE FONCTION SOMMATRICE PARTICULIÈRE [1].

4. Abordons maintenant l'étude des singularités particulières comme, par exemple, les singularités algébrico-logarithmiques, qui se trouvent aux sommets de l'étoile attachée à la fonction étudiée. Pour arriver à des résultats précis, il faut spécialiser la fonction entière sommatrice. Prenons d'abord la fonction entière étudiée soigneusement par M. Lindelöf [2]:

$$L_\beta(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n} \qquad (\beta>1).$$

Remarquons que, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a=\infty}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}}=\lim_{n=\infty}\left[\frac{\log n}{\log(n+\beta)}\right]^n=1,$$

et posons

$$L(a)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{a^m}{[\log m]^m}$$

et

$$L_r(a)=\sum_{m=2}^{\infty}m^r\frac{a^m}{[\log m]^m}.$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{a=\infty}\frac{L_r(a)}{e^{ra}L(a)}=\frac{1}{e^r}. \tag{8}$$

Le nombre a étant fixé, cherchons tout d'abord l'indice n du terme maximum dans $L(a)$. On obtient pour n l'équation

$$\log a=\log\log n+\frac{1}{\log n} \tag{9}$$

---

[1] P. et V. DIENES, *op. cit.*, p. 420.

[2] E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus*, p. 121; Paris, Gauthier-Villars, 1905.

ou bien

$$a = \log n\, e^{\frac{1}{\log n}},$$

ce qui nous donne

$$n = f(a),$$

fonction continue de a dont les propriétés fondamentales sont, pour a suffisamment grand, que

$$\lim_{a=\infty} f(a) = \infty \qquad \text{et} \qquad f'(a) > 0.$$

Remarque préliminaire. — La condition

$$\lim_{n=\infty} g(n) = \alpha$$

entraîne cependant

$$\lim_{a=\infty} g[f(a)] = \alpha,$$

si

$$\lim_{n=\infty} f(a) = \infty$$

et si

$$f'(a) > 0,$$

pour a suffisamment grand.

Introduisons la notation suivante. Soient, k étant > 1,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} A(a) &= \sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1} \frac{a^m}{[\log m]^m}, \\ C(a) &= \sum_{m=\frac{n}{k}}^{kn} \frac{a^m}{[\log m]^m}, \\ B(a) &= \sum_{m=kn+1}^{\infty} \frac{a^m}{[\log m]^m} \end{aligned}\right.$$

et

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} A_r(a) &= \sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1} m^r \frac{a^m}{[\log m]^m}, \\ C_r(a) &= \sum_{m=\frac{n}{k}}^{kn} m^r \frac{a^m}{[\log m]^m}, \\ B_r(a) &= \sum_{m=kn+1}^{\infty} m^r \frac{a^m}{[\log m]^m}. \end{aligned}\right.$$

On a

$$(12)\qquad \mathrm{A}(a)+\left(\frac{n}{k}\right)^r \mathrm{C}(a)+(kn)^r\,\mathrm{B}(a)<\mathrm{L}_r(a)$$
$$<\left(\frac{n}{k}\right)^r \mathrm{A}(a)+(kn)^r\,\mathrm{C}(a)+\mathrm{B}_r(a),$$

c'est-à-dire

$$(13)\qquad \frac{\mathrm{A}(a)}{e^{ra}\,\mathrm{L}(a)}+\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r}{e^{ra}}\,\frac{\mathrm{C}(a)}{\mathrm{L}(a)}+\frac{(kn)^r}{e^{ra}}\,\frac{\mathrm{B}(a)}{\mathrm{L}(a)}$$
$$<\frac{\mathrm{L}_r(a)}{e^{ra}\,\mathrm{L}(a)}<\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r \mathrm{A}(a)}{e^{ra}\,\mathrm{L}(a)}+\frac{(kn)^r}{e^{ra}}\,\frac{\mathrm{C}(a)}{\mathrm{L}(a)}+\frac{\mathrm{B}_r(a)}{e^{ra}\,\mathrm{L}(a)},$$

où $n=f(a)$.

Nous démontrerons tout d'abord que

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{n}{n^{e^{\frac{1}{\log n}}}}=\frac{1}{e};$$

d'où, grâce à la remarque préliminaire,

$$(15)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{[f(a)]^r}{e^{ra}}=\frac{1}{e^r}.$$

On peut écrire en effet

$$\frac{n}{n^{e^{\frac{1}{\log n}}}}=e^{\log n-e^{\frac{1}{\log n}}\log n}=e^{\log n\left[1-e^{\frac{1}{\log n}}\right]},$$

et d'après l'Hospital

$$\lim_{n=\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{\log n}}}{\frac{1}{\log n}}=\lim_{n=\infty}\frac{-e^{\frac{1}{\log n}}\left(\frac{1}{\log n}\right)'}{\left(\frac{1}{\log n}\right)'}=\lim_{n=\infty}-e^{\frac{1}{\log n}}=-1.$$

C. Q. F. D.

5. Nous allons voir que dans (13) les premiers et les derniers termes tendent vers o pour $a=\infty$. C'est-à-dire démontrons que

$$(16)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{\mathrm{A}(a)}{\mathrm{L}(a)}=0$$

et que

$$(17)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{\mathrm{B}_r(a)}{\mathrm{L}(a)}=0,$$

dont un cas particulier ($r=0$) est l'égalité

$$(18) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{B(a)}{L(a)} = 0.$$

Soit $\mu(a)$ le terme maximum de la série $L(a)$. Pour établir (16) il suffit évidemment de démontrer que

$$(16') \qquad \lim_{a=\infty} \frac{A(a)}{\mu(a)} = 0,$$

car, les coefficients de $L(a)$ étant positifs, $\mu(a) < L(a)$.

Pour établir (16′) nous allons montrer que

$$\lim_{n=\infty} \frac{A\left(\log n\, e^{\frac{1}{\log n}}\right)}{\mu\left(\log n\, e^{\frac{1}{\log n}}\right)} = \lim_{n=\infty} D(n) = 0,$$

d'où l'on pourra conclure, d'après la remarque préliminaire, que

$$\lim_{a=\infty} D[f(a)] = \lim_{a=\infty} \frac{A(a)}{\mu(a)} = 0.$$

Examinons donc $D(n)$. Il est plus petit que le dernier terme multiplié par le nombre des termes, étant donné que le dernier terme est le plus grand; c'est-à-dire

$$D(n) < \frac{n}{k} \frac{[\log n]^{\frac{n}{k}} e^{\frac{n}{k\log n}}}{\left[\log \frac{n}{k}\right]^{\frac{n}{k}}} \frac{1}{e^{\frac{n}{\log n}}},$$

car le terme maximum de $L(a)$ est

$$\frac{a^n}{[\log n]^n} = \frac{[\log n]^n e^{\frac{n}{\log n}}}{[\log n]^n} = e^{\frac{n}{\log n}}.$$

On a donc

$$D(n) < e^{\frac{n}{k}\log\log n + \frac{n}{k\log n} - \frac{n}{k}\log\log\frac{n}{k} - \frac{n}{\log n} + \log\frac{n}{k}}.$$

Le troisième terme de l'exposant peut se mettre sous la forme

$$-\frac{n}{k}\log(\log n - \log k) = -\frac{n}{k}\left[\log\log n + \log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right)\right],$$

qui détruit donc le premier terme de l'exposant. D'autre part,

$$\lim_{n=\infty} \log n \log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) = -\log k,$$

de sorte que

$$\log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) = \frac{-\log k}{\log n} + \frac{\varepsilon(n)}{\log n},$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

On peut donc écrire

$$D(n) < e^{\frac{n}{\log n}\left[\frac{1}{k} + \frac{\log k}{k} - 1 - \varepsilon'(n)\right]},$$

et l'on voit facilement que, pour $k > 1$,

$$\frac{1}{k} + \frac{\log k}{k} - 1 < 0, \tag{19}$$

ce qui montre que le coefficient de $\frac{n}{\log n}$ est négatif, pour n assez grand, d'où le résultat

$$\lim_{n=\infty} D(n) = 0.$$

Pour démontrer l'inégalité (19) il suffit de vérifier l'inégalité

$$\varphi(k) \equiv 1 + \log k - k < 0 \qquad (k > 1),$$

ce qui est évident si l'on remarque que

$$\varphi'(k) = \frac{1}{k} - 1 < 0;$$

donc $\varphi(k)$ décroît constamment pour les valeurs considérées de k et que $\varphi(1) = 0$.

6. Nous allons démontrer (17) d'une manière analogue.

Tout d'abord

$$\lim_{n=\infty} \frac{kn}{[\log(kn)]^{\frac{\log(kn)}{r}}} = 0;$$

on peut donc prendre n assez grand pour que

$$\frac{(kn)^r}{[\log(kn)]^{\log(kn)}} < 1,$$

d'où l'on obtient l'inégalité

$$(20)\qquad B_r(a) < \frac{a^{kn}}{[\log(kn)]^{kn-\log(kn)}} + \frac{a^{kn+1}}{[\log(kn+1)]^{kn+1-\log(kn+1)}} + \ldots.$$

Établissons encore que, pour n assez grand, le maximum de

$$\frac{a^x}{(\log x)^{x-\log x}},$$

en fonction de a ou de n, est atteint pour $x < kn$ [où $n = f(a)$].

L'argument x, qui donne à l'expression une valeur maximum, satisfait à l'équation

$$\log a = \log\log x + \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x}[1 + \log\log x] = h(x).$$

On voit facilement que

$$h'(x) > 0,$$

pour $x > e$; donc, si nous démontrons que $h(kn) > \log a$, il est établi que l'argument x, qui rend maximum notre expression, est moindre que kn.

Démontrons par suite que

$$h(kn) > \log a = \log\log n + \frac{1}{\log n},$$

c'est-à-dire que

$$\log\log(kn) + \frac{1}{\log(kn)} - \frac{1}{kn}[1 + \log\log(kn)] > \log\log n + \frac{1}{\log n},$$

ou bien que

$$\log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) + \frac{1}{\log n}\left[1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\log k}{\log n}}\right] - \frac{1}{kn}[1 + \log\log(kn)] > 0.$$

Mais nous avons vu que

$$\lim_{n=\infty} \log n \log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) = \log k,$$

et l'on vérifie aisément que

$$\lim_{n=\infty} \log n \left[1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\log k}{\log n}}\right] = \log k,$$

ce qui démontre notre inégalité.

On voit par ces calculs que dans le second membre de (20) c'est le premier terme qui est le plus grand. Prenons donc, au lieu des premiers termes de ce second membre jusqu'à l'indice $e^{(\log n)^2}$, le premier terme multiplié par $e^{(\log n)^2}$, supérieur à leur nombre.

La somme des termes d'indice plus grand ou égal à $e^{(\log n)^2}$ tend déjà vers zéro pour $a = \infty$. En effet, soit $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple; l'inégalité

$$\frac{a}{[\log\nu]^{1-\frac{\log\nu}{\nu}}} < \frac{a}{[\log\nu]^{1-\varepsilon}}$$

est vérifiée dès que $\nu \geqq e^4$. D'autre part,

$$[\log(\nu+m)]^{(\nu+m)\left[1-\frac{\log(\nu+m)}{\nu+m}\right]} > [\log\nu]^{(\nu+m)(1-\varepsilon)}.$$

D'où il résulte qu'en désignant par c_i les termes du second membre de (20),

$$c_{\nu+m} < \left[\frac{a}{(\log\nu)^{1-\varepsilon}}\right]^{\nu} \left[\frac{a}{(\log\nu)^{1-\varepsilon}}\right]^{m},$$

de sorte que m ne se trouve plus qu'à l'exposant.

Remplaçons ν par $e^{(\log n)^2}$. On a

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}} = \lim_{n=\infty} \frac{\log n\, e^{\frac{1}{\log n}}}{\log n} \frac{(\log n)^{2\varepsilon}}{\log n} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} S_{e^{(\log n)^2}} &= c_\nu + c_{\nu+1} + \ldots + c_{\nu+m} + \ldots \\ &< \left[\frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}}\right]^{e^{(\log n)^2}} \left[1 + \frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}} + \ldots\right] \\ &< \left[\frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}}\right]^{e^{(\log n)^2}} \frac{1}{1 - \frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}}}, \end{aligned}$$

ce qui démontre enfin que

$$\lim_{n=\infty} S_{e^{(\log n)^2}} = 0.$$

7. Remplaçons donc l'inégalité (20) par

$$B_r(a) < e^{(\log n)^2} \frac{a^{kn}}{[\log(kn)]^{kn-\log(kn)}} + S_{e^{(\log n)^2}},$$

et remarquons que, pour établir l'égalité

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r(a)}{L(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{B_r\left(\log n\, e^{\frac{1}{\log n}}\right)}{L\left(\log n\, e^{\frac{1}{\log n}}\right)} = 0,$$

il suffit de montrer que

$$\lim_{n=\infty} e^{(\log n)^2} \frac{a^{kn}}{[\log(kn)]^{kn-\log(kn)}\, e^{\frac{n}{\log n}}} = 0,$$

si l'on y considère a comme fonction de n :

$$a = \log n\, e^{\frac{1}{\log n}},$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\lim_{n=\infty} e^{(\log n)^2 + kn\log\log n + \frac{kn}{\log n} - [kn - \log(kn)]\log\log(kn) - \frac{n}{\log n}} = 0.$$

Le troisième terme de l'exposant s'écrit encore

$$-kn\log\log n - kn\log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) + \log(kn)\log\log(kn),$$

dont le premier terme détruit le deuxième terme de l'exposant.

Nous savons, d'autre part, que

$$\lim_{n=\infty} \log n \log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) = \log k.$$

Donc l'ordre de grandeur de l'exposant est $\frac{n}{\log n}$ et l'exposant total se met sous la forme

$$\frac{n}{\log n}[k - k\log k - 1 + \varepsilon(n)],$$

où (¹)

$$k - k\log k - 1 < 0,$$

d'où l'on conclut que (17) et (18) sont vrais.

Enfin les égalités (16) et (18) nous montrent que

$$\lim_{a=\infty} \frac{C(a)}{L(a)} = \lim_{a=\infty} \frac{L(a) - A(a) - B(a)}{L(a)} = 1.$$

(¹) P. Dienes, *loc. cit.*, p. 401.

Reprenons maintenant, après ces calculs préliminaires, nos inégalités fondamentales (13). Les résultats acquis, joints à (15), donnent immédiatement

$$\liminf_{a=\infty} \frac{L_r(a)}{e^{ra}\,L(a)} \geqq \frac{1}{e^r k^r},$$

$$\limsup_{a=\infty} \frac{L_r(a)}{e^{ra}\,L(a)} \leqq \frac{k^r}{e^r}.$$

Mais les deux inégalités dernières sont valables pour k quelconque supérieur à l'unité; donc

$$\lim_{a=\infty} \frac{L_r(a)}{e^{ra}\,L(a)} = \frac{1}{e^r},$$

ce qu'il fallait établir.

L'ÉTUDE DES POINTS CRITIQUES ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUES AUX SOMMETS DE L'ÉTOILE.

8. Soit x_0 un sommet de l'étoile et supposons qu'au voisinage de x_0

$$f(x) = \frac{B_r}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^r} + f_1(x),$$

où l'ordre de $f_1(x)$ en x_0 est inférieure à r. Par exemple, si x_0 est un pôle ou un point critique algébrique de la fonction.

D'après la dernière hypothèse

$$f_1(x) = f_2(x) + f_3(x) = \Sigma\, b_n x^n + \Sigma\, c_n x^n,$$

où $f_2(x)$ est régulière à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$, son ordre sur le cercle entier étant moindre que r et $f_0(x)$ est holomorphe sur la droite $(0, x_0)$ extrémités comprises.

On a donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(b_n, x_0)}{n^r} = 0.$$

Écrivons le théorème de M. Mittag-Leffler pour la fonction

$$f_3(x) = f(x) - \frac{B_r}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^r} - f_2(x).$$

On obtient

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [s_n - B_r B_n^{(r+1)} - s_n(b_n, x_0)] \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = f_3(x_0);$$

par suite, ces moyennes, divisées par e^{ar}, tendent vers zéro.

D'autre part,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n(b_n, x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}\right|}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} \leq \lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |s_n(b_n, x_0)| \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \lim_{n=\infty} \frac{|s_n(b_n, x_0)|}{n^r}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n(b_n, x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ra} L(a)} = 0$$

et

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r+1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \lim_{n=\infty} \frac{B_n^{(r+1)}}{n^r} = \frac{1}{\Gamma(r+1)},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r+1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ra} L(a)} = \frac{1}{e^r \Gamma(r+1)}.$$

En tenant compte des égalités obtenues, on arrive à l'équation

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ar} L(a)} = \frac{B_r}{e^r \Gamma(r+1)}.$$

Mais, pour β quelconque,

$$\lim_{a=\infty} \frac{L(a)}{L_\beta(a)} = 1,$$

à cause de la limite

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\log(n+\beta)}{\log n}\right]^n = 1.$$

Donc enfin

$$\lim_{a=\infty}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0)\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ar}\,\mathrm{L}_\beta(a)} = \frac{\mathrm{B}_r}{e^r\,\Gamma(r+1)},$$

ou encore

$$\lim_{a=\infty}\frac{\mathrm{M}(a, x_0)}{e^{ar}} = \frac{\mathrm{B}_r}{e^r\,\Gamma(r+1)}. \tag{21}$$

Un point critique algébrique d'ordre r apparaît dans les moyennes du type $\mathrm{L}_\beta(a)$ *comme un infini d'ordre* $r\omega$ (selon la notation introduite par M. Borel), *c'est-à-dire comme la* $r^{\text{ième}}$ *puissance de* e^a.

Si l'on remarque que ce sont les fonctions entières $\mathrm{M}(a, x)$ qui, pour $a=\infty$, représentent la fonction envisagée, on peut interpréter le dernier résultat de la manière suivante :

La suite numérique

$$\lim_{a=\infty}\mathrm{M}(a, x_0),$$

formée en un point critique algébrique à un sommet de l'étoile, est en relation simple avec la singularité envisagée, en décèle le degré d'infinitude, le coefficient principal et en détermine ainsi la partie dominante.

Remarquons enfin que, malgré les calculs un peu longs qui nous ont amené au résultat final, la simplicité de la formule définitive est tout à fait remarquable, grâce au choix convenable de la fonction sommatrice.

9. Étendons encore le résultat dernièrement obtenu aux points critiques à la fois algébrique et logarithmique où la fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\mathrm{P}_q\left[\log\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^q} + f_1(x), \tag{22}$$

l'ordre de $f_1(x)$ au point x_0 étant inférieur à ρ. Calculons à cet effet les moyennes $M(a, 1)$ relatives à la fonction

$$\frac{\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}.$$

Comme les s_n de cette fonction sont comparables à

$$(\log n)^q n^\rho \frac{1}{\Gamma(\rho+1)},$$

la croissance des sommes considérées est égale à celle de

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^q n^\rho \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\Gamma(\rho+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}.$$

Mais le théorème de Cesàro, déjà cité, permet de prendre $\beta=0$, car

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\log(n+\beta)}{\log n}\right]^n = 1.$$

Cherchons donc l'ordre de croissance de la fonction

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^q n^\rho \frac{a^n}{(\log n)^n}}{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}} = \frac{P_{q-1}(a)}{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}} + \frac{a^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+q)^\rho \frac{a^n}{[\log(n+q)]^n}}{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}}.$$

D'après la remarque précédente on peut prendre n^ρ et $(\log n)^n$ au lieu de $(n+q)^\rho$ et $[\log(n+q)]^n$ sans changer la croissance de la fonction, de sorte qu'il suffit d'examiner le rapport

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} n^\rho \frac{a^n}{(\log n)^n}}{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}},$$

ce que nous avons achevé précédemment. On peut donc conclure.

grâce à la relation (8), que

$$\frac{M(a, 1)}{a^q e^{\rho a}} = \frac{1}{e^r \Gamma(\rho + 1)}. \tag{23}$$

On démontre maintenant, comme auparavant, que la croissance des moyennes $M_1(a, x_0)$, formées pour la fonction $f_1(x)$, est inférieure à celle de $M(a, x_0)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{a=\infty} \frac{M_1(a, x_0)}{a^q e^{\rho a}} = 0,$$

et l'on obtient ainsi, sans aucune difficulté, la relation générale

$$\lim_{a=\infty} \frac{M(a, x_0)}{a^q e^{\rho a}} = \frac{A_q}{e^\rho \Gamma(\rho + 1)}. \tag{24}$$

Un point critique algébrico-logarithmique de degré (q, ρ), ou avec la notation de M. Borel, *d'ordre* $q\frac{1}{\omega} + \rho$, *se trahit dans les moyennes* $M(a, x_0)$ *comme un infini d'ordre* ω *fois plus grand :*

$$\left(q\frac{1}{\omega} + \rho\right)\omega = q + \rho\omega.$$

Nous voyons que la fonction sommatrice choisie permet de trouver des relations dont la simplicité s'approche de celles obtenues par l'emploi de la fonction exponentielle elle-même. L'écart, cependant, entre l'ordre de croissance de la fonction et celui des moyennes, qui n'empêche nullement une correspondance précise, est considérable. On pourrait donc se proposer de trouver une autre fonction sommatrice qui donnerait des relations plus satisfaisantes à cet égard.

CHAPITRE V.

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DES SINGULARITÉS.

1. Dans les Chapitres précédents nous avons développé quelques méthodes pour étudier le voisinage d'un point singulier. Ces méthodes, quoique assez efficaces pour explorer la singularité en un point du cercle de convergence ou en un sommet de l'étoile, ont toutes un inconvénient bien grave. C'est que les points singuliers qui peuvent être atteints par elles sont déterminés par leurs mécanismes même d'une manière absolument rigoureuse. Si donc c'est le point singulier qui est donné à l'avance, nous ne pouvons nous servir qu'accidentellement des résultats obtenus jusqu'ici. Et, du moins au point de vue des singularités, le problème général qui se pose dans leur étude est justement de pouvoir décider si la fonction est holomorphe ou non le long d'un chemin *donné à l'avance*, et, dans le premier cas, de pouvoir étudier la nature de la singularité autour du point où aboutit ce chemin.

Dans ce dernier Chapitre, nous allons exposer des développements en séries de polynomes dont l'avantage principal est qu'ils contiennent un paramètre et une courbe arbitraire nommée *courbe génératrice*, de façon qu'en variant ces deux données on déforme presque à volonté le domaine de convergence du développement. Nous aurons ainsi un moyen très souple qui nous permettra de résoudre presque complètement le problème général des singularités énoncé il y a un instant.

Un autre manque de perfection des méthodes précédentes est que la correspondance entre formule et fonction, c'est-à-dire entre les propriétés limites de la formule où l'on a remplacé x par l'affixe d'un point singulier et l'allure de la fonction au voisinage de ce point singulier devient de plus en plus compliquée et de moins en moins précise au fur et à mesure que s'élargit le champ de représentation. Les développements de ce Chapitre n'auront plus cette imperfection.

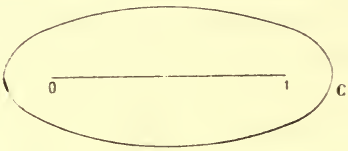
UNE CLASSE DE REPRÉSENTATIONS VALABLES DANS L'ÉTOILE CURVILIGNE.

2. Prenons une fonction analytique quelconque $f(x)$ définie par la série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1}$$

et considérons une courbe fermée C contenant le segment (0, 1) à son intérieur. Il y a une transformation conforme $v = \varphi(u)$ qui fait correspondre l'aire de contour C au cercle de rayon $r > 1$, de

Fig. 8.



telle façon que les points $u = 0$ et $u = 1$ correspondent aux mêmes points $v = 0$ et $v = 1$.

On a ainsi, pour $|u|$ assez petit, $|\varphi(u)| < r_0$, de sorte qu'on peut faire la substitution

$$f[\varphi(u)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi(u)]^n. \tag{2}$$

Mais $\varphi(u)$, comme toute transformation conforme de la nature indiquée, est holomorphe au voisinage de l'origine. Posons

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u^n, \tag{3}$$

de façon qu'on peut développer la fonction de u représentée par la formule (2) dans une série de Taylor

$$f[\varphi(u)] = \sum_{n=0}^{\infty} Q(a_n)\, u^n, \tag{4}$$

où $Q(a_n)$ est une combinaison linéaire et homogène de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avec des coefficients numériques déterminés $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Si $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur de C, $f[\varphi(u)]$ est holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence du cercle de rayon 1. Par conséquent, le rayon de convergence de la série de Taylor (4) dépasse l'unité. En posant $u = 1$, on obtient la formule

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(a_n), \tag{5}$$

valable pour une fonction quelconque $f(x)$ holomorphe dans C. Appliquons-la à la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n x^n;$$

c'est permis si $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur et sur la frontière du domaine C^{x_0} dont on obtient le contour en faisant varier θ de 0 à 2π dans l'expression $x_0\varphi(e^{i\theta})$. On a donc, dans ces conditions,

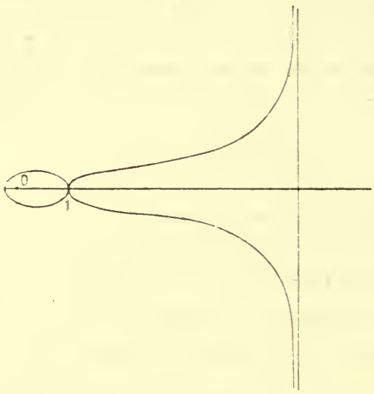
$$F(1) = f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(a_n x_0^n), \tag{6}$$

où, par $Q_n(a_n x_0^n)$, nous voulons indiquer le résultat de la substitution à la place de a_i.

Examinons de plus près le domaine A de x où ce développement est possible. Dans ce domaine, en effet, la formule (6) représente la fonction $f(x)$ par une série de polynomes faciles à construire.

Il est évident que les points frontières de A sont des points z tels que $f(x)$ soit holomorphe dans C^z, tout en présentant nécessairement un point singulier sur le contour de cet aire. Désignons par ζ l'un quelconque des points singuliers ainsi mis en évidence. On voit, de ce qui précède, que pour chaque point frontière z il existe un ζ tel qu'on ait $\zeta = zx$ pour une valeur de x sur le contour de C. Le point ζ étant fixé, regardons la courbe C_1^ζ décrite par $z = \dfrac{\zeta}{x}$ quand x parcourt la frontière de C. On obtient donc C_1 (égal à C_1^1) en effectuant sur le symétrique de C par rapport à l'axe réel une inversion de puissance 1 ayant le pôle à l'origine. Le contour de A est formé exclusivement d'arcs de courbes C_1^ν, par conséquent d'arcs semblables à C_1 ou à des fragments de C_1.

Fig. 9.



Ce qui est essentiel pour la suite, c'est que le domaine A change avec C et de telle façon qu'il tend vers l'étoile principale E si l'on choisit des domaines C^α contenant tous le segment (o, 1) à leur intérieur et se réduisant précisément à ce segment pour $\alpha = 0$. Cela résulte du fait que, étant donné un point quelconque x à l'intérieur de l'étoile, on peut prendre x assez petit pour que la fonction soit holomorphe dans l'aire $x C^\alpha$ de même que sur son contour, et répéter ainsi le raisonnement qui nous a conduit à l'égalité (6). On arrive ainsi à la formule remarquable

$$(7) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(a_n x^n, \alpha),$$

valable dans un domaine $A^{(\alpha)}$ dont la limite pour $\alpha = 0$ est l'étoile E. Plus précisément, en désignant par $\varphi(u, \alpha)$ les transformations conformes qui effectuent la correspondance entre C^α et le cercle de rayon $r > 1$, on peut écrire

$$(8) \qquad f[x\varphi(u, \alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(a_n x^n, \alpha)\, u^n,$$

valable pour $|u| \leqq 1$ si x est un point à l'intérieur du domaine $A^{(\alpha)}$.

3. On peut généraliser considérablement le résultat acquis jusqu'ici. Remplaçons, en effet, dans le raisonnement précédent, le segment (o, 1) par une courbe quelconque l sans points multiples joignant les deux points o et 1 et entourons cette courbe par une suite de contours $\gamma^{(\alpha)}$ qui, à la limite $\alpha = 0$, coïncident avec l. Nous aurons toujours des transformations conformes qui font correspondre $\gamma^{(\alpha)}$ au cercle de rayon $r > 1$, et cela de façon qu'on ait

$$\varphi(0, \alpha) = 0, \qquad \varphi(1, \alpha) = 1,$$

si l'on désigne ces transformations de nouveau par $v = \varphi(u, \alpha)$. La courbe l se trouve à l'intérieur de chacun de ces contours.

Pour interpréter le résultat qu'on obtient sans aucun calcul en refaisant le raisonnement précédent, définissons l'étoile curviligne E^l d'espèce l. Il suffit de définir évidemment les points intérieurs de l'étoile. Pour cela, x étant un point du plan complexe, considérons la courbe l^x qu'on obtient en prenant l'homothétique de l par rapport à l'origine avec le rapport d'homothétie $|x|$ et en faisant tourner cette transformée autour de l'origine de l'angle θ, argument de x. Le point x est considéré comme intérieur à l'étoile curviligne E^l d'espèce l attachée à la fonction $f(x)$ si $f(x)$ est holomorphe le long de l^x extrémité comprise.

On arrive ainsi aux deux formules déjà assez générales

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(a_n x^n, \alpha) \tag{9}$$

et

$$f[x\varphi(u, \alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(a_n x^n, \alpha) u^n \qquad (|u| \leqq 1), \tag{10}$$

valables à l'intérieur d'un domaine $B^{(\alpha)}$ dont la limite pour $\alpha = 0$ est l'étoile curviligne E^l.

Il est facile de donner aux polynomes $G_n(a_n x^n, \alpha)$ la forme plus explicite

$$G_n(a_n x^n, \alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d^n \varphi^i}{du^n}\right)_{u=0} a_i x^i. \tag{11}$$

4. Démontrons que les séries (7) et (9) convergent absolument et uniformément dans chaque aire finie g du plan x située entiè-

rement à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$ respectivement $B^{(\alpha)}$. D'abord chaque série de Taylor converge absolument sur une courbe quelconque à l'intérieur du cercle de convergence; donc, comme le rayon de convergence de la série de Taylor (10) dépasse l'unité, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} | G_n(a_n x^n, \alpha) |$$

est convergente pour un x quelconque de l'aire g. Notre série est donc absolument convergente.

Pour montrer que sa convergence est uniforme, remarquons qu'étant donnée une série de Taylor quelconque

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dont le rayon de convergence r dépasse l'unité, le module maximum du reste s'exprime en fonction du module maximum de $f(x)$ par la formule classique (¹)

$$| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots | < \frac{M}{\rho^n(\rho - 1)},$$

où $1 < \rho < r$ et

$$| f(x) | \leqq M,$$

dans le cercle de rayon ρ.

Avant d'appliquer cette remarque à la série (10), ajoutons que, le domaine g étant donné, le développement (10) est convergent dans un cercle de rayon $r > 1$ indépendamment de x. En effet, considérons l'ensemble des contours γ_α^x définis par les équations

$$v = x\varphi(e^{i\theta}, \alpha) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

où l'on doit considérer x comme un point fixé de g et où θ parcourt tout l'intervalle $(0, 2\pi)$, et soit D l'ensemble des points qui appartiennent au moins à une des aires limités par les γ_α^x. Par hypothèse $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur et sur la frontière même de D. Substituons maintenant aux contours γ_α^x les contours δ_α^x définis par les équations

$$v = x\varphi(re^{i\theta}, \alpha).$$

(¹) *Voir* JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2ᵉ édition, p. 252.

où r est un peu plus grand que 1. L'ensemble D_r correspondant à D contiendra le dernier à son intérieur et, pour $r = 1$, il va coïncider avec D. De plus, l'aire D_r varie d'une manière continue avec r. On peut donc choisir un r assez proche de l'unité de façon que $f(x)$ soit holomorphe à l'intérieur et sur la frontière de D_r. Mais, dans ces conditions, pour un x quelconque de l'aire g, $f[x\varphi(u, \alpha)]$ est une fonction holomorphe de la variable u, du moins dans le cercle de rayon r et sur sa circonférence.

D'autre part, toutes les fonctions de u qu'on obtient en faisant varier x dans g se composent des valeurs de $f(x)$ prises de D_r. Toutes ces valeurs ont donc un module maximum commun M. Il en résulte que

$$|\,G_{n+1}(a_{n+1}x^{n+1}, \alpha) + G_{n+2}(a_{n+2}x^{n+2}, \alpha) + \ldots\,| < \frac{M}{\rho^n(\rho - 1)},$$
$$1 < \rho < r,$$

indépendamment de x. La convergence est donc uniforme.

5. Le développement (9) permet de construire une série de polynomes indépendante de α qui représente $f(x)$ dans l'étoile entière E^l. En effet, soient α_i, ε_i et $r_i - 1$ trois suites de nombres positifs décroissants ayant pour limites 0 telles que $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ soit convergente ; déterminons de plus n_i de façon qu'on ait

$$\frac{1}{r_i^{n_i}(r_i - 1)} < \varepsilon_i.$$

Cela posé, prenons les $n_k + 1$ premiers termes du développement

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(a_n x^n, \alpha_k), \tag{12}$$

dont nous désignerons la somme par $H_k(x)$, $[H_0 = 0]$, et formons la série de polynomes

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [H_k(x) - H_{k-1}(x)]. \tag{13}$$

La somme, S_k, des $k + 1$ premiers termes de cette série est égale à $a_0 + H_k(x)$, c'est-à-dire à la somme des $n_k + 1$ premiers termes de la série de Taylor

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(a_n x^n, \alpha_k) u^n,$$

au point $u = 1$. Mais nous avons vu que, pour α_k assez petit, c'est-à-dire pour k assez grand, cette série de Taylor qui, pour $u = 1$, se réduit à la série de polynomes (12), représente $f(x)$ quelle que soit la valeur de x prise d'une aire finie g à l'intérieur de l'étoile E^l. Plus précisément,

$$|f(x) - S_k| < \frac{M}{r_k^{n_k}(r_k - 1)} < M\varepsilon_k,$$

car, pour k assez grand, r_k est suffisamment près de l'unité pour que les valeurs de $f(x)$ dont se compose la fonction de u, $f[x\varphi(u, \alpha)]$, se trouvent tous dans D_{r_k}. La série (13) est donc uniformément convergente dans toute aire g à l'intérieur de l'étoile E^l et représente la fonction $f(x)$.

Elle est même absolument convergente, car pour $i > k$

$$|H_{i+1}(x) - H_i(x)| \leqq |H_{i+1}(x) - f(x)| + |H_i(x) - f(x)| < 2M\varepsilon_k,$$

et le reste $\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots$ d'une série convergente tend vers o avec $\frac{1}{k}$. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |H_k(x) - H_{k-1}(x)|$$

est donc convergente.

Cette représentation d'une fonction analytique quelconque à l'intérieur de l'étoile curviligne définie par $\varphi(u, \alpha)$ et par la fonction elle-même, est due à M. Painlevé (¹).

Les développements (9) et (13) sont des séries de polynomes et, d'après la formule (11), on peut les écrire sous la forme

$$(14) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (C_1^{(i)} a_1 x + C_2^{(i)} a_2 x^2 + \ldots + C_{n_i}^{(i)} a_{n_i} x^{n_i}).$$

(¹) Note sur le développement des fonctions analytiques dans les *Leçons* de M. Borel, *sur les fonctions de variables réelles*.

Au cas du développement (9) les coefficients c dépendent encore du paramètre α, et le développement n'est valable qu'à l'intérieur du domaine $B^{(\alpha)}$; s'il s'agit du développement (13), les coefficients c ne dépendent que de leurs indices et la série représente $f(x)$ dans l'étoile entière E^l. On voit que la construction de la série est entièrement déterminée par les coefficients c_n, donc, en dernière analyse, par la suite des représentations conformes $v = \varphi(u, \alpha)$.

On sait que la propriété si caractéristique de la série de Taylor d'avoir nécessairement un cercle pour son domaine de convergence résulte de la forme, de la construction même de cette série; la fonction développée, c'est-à-dire les valeurs numériques des coefficients, ne déterminent que la grandeur du rayon de ce cercle. De même la forme du développement (14) exige que le domaine de convergence soit une étoile d'espèce l et la fonction, c'est-à-dire les coefficients a_n, ne déterminent que l'étoile particulière de cette espèce qui convient à la fonction développée.

L'ÉTUDE GÉNÉRALE DES SINGULARITÉS AUX SOMMETS D'UNE ÉTOILE CURVILIGNE D'ESPÈCE l (1).

6. Ces considérations effectuées, abordons l'étude des singularités aux sommets d'une étoile curviligne ou rectiligne E^l. Soit x_0 un tel sommet. Nous allons généraliser tout d'abord un célèbre théorème d'Abel d'après lequel si une série de Taylor converge en un point de son cercle de convergence, la fonction représentée par la série tend vers une valeur bien déterminée quand on s'approche de ce point à l'intérieur du cercle de convergence le long d'un chemin quelconque ne touchant pas le cercle.

A cet effet et pour simplifier l'énoncé de nos résultats, introduisons les expressions : voisinage angulaire et circulaire de x_0 vers l^{x_0}. Traçons en x_0 un angle d'ouverture inférieure à π et symétrique à la tangente de la courbe l^{x_0} en ce point et ne considérons que la partie de l'angle la plus proche de x_0. Ce domaine angulaire arbitrairement petit, *frontière comprise*, forme le voisi-

(1) P. et V. DIENES, *op. cit.*, Chapitre III, et P. DIENES, *Note sur les séries de polynomes et les singularités des fonctions analytiques.* (*Comptes rendus*, t. CLII, séance du 13 février 1911.)

nage angulaire de x_0 vers l^{x_0}. Si, au lieu d'un angle, on trace un cercle passant par x_0 et ayant pour diamètre arbitrairement petit un segment de la tangente à la courbe l^{x_0} en x_0, ce cercle, y compris sa circonférence, forme le voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}.

D'autre part, soit $D(\alpha, x_0)$ le domaine de la variable x défini par l'équation

$$x = x_0\,\varphi(u, \alpha),$$

quand u parcourt la circonférence de rayon 1 et supposons, pour rendre les démonstrations plus intuitives, que pour $\alpha' < \alpha$ le domaine $D(\alpha', x_0)$ se trouve entièrement à l'intérieur de $D(\alpha, x_0)$ excepté le seul point x_0 qui est commun aux deux contours.

De plus, dans la plupart des représentations ou des classes de représentations proposées, la fonction $\varphi(u, \alpha)$ est holomorphe au point $u = 1$. Supposons-le pour le moment afin d'examiner ensuite un cas intéressant où cette condition n'est plus remplie.

Cela posé, démontrons le théorème suivant :

Si, pour α assez petit, la série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(a_n x^n, \alpha) = f(x), \tag{7}$$

converge en x_0, la fonction $f(x)$ est continue, et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}, c'est-à-dire qu'elle tend vers une valeur bien déterminée si l'on s'approche de x_0 en ce voisinage. On voit que c'est la généralisation directe du théorème d'Abel cité plus haut et, si l'étoile est rectiligne, *on a pour l'étoile le théorème d'Abel sans aucune modification.*

Dans le cas considéré, la série de Taylor

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(a_n x_0^n, \alpha) u^n,$$

est convergente pour $u = 1$ si α est suffisamment petit. La fonction de u représentée par cette série est donc holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1 et, d'après le théorème d'Abel, elle est continue dans le voisinage angulaire de 1 vers le rayon (0, 1).

Mais au cercle de rayon 1, dans le plan des u, correspond au plan des x le domaine $D(\alpha, x_0)$, et le contour $C(\alpha, x_0)$ de ce domaine a une tangente unique en x_0, car, grâce à l'hypothèse que $\varphi(u, \alpha)$ est holomorphe pour $u = 1$, la représentation du plan des u sur celui des v effectuée par la formule $v = x_0 \varphi(u, \alpha)$ est conforme au voisinage du point 1. On conclut de même que, dans le plan des u, l'angle entre le segment $(0, 1)$ et la tangente au cercle dans le point 1 étant égal à $\frac{\pi}{2}$, il en est de même de l'angle des deux directions correspondantes : la tangente à l^{x_0} en x_0 et la tangente au contour $C(\alpha, x_0)$ au même point. On voit par cela qu'au voisinage angulaire du point 1 vers le rayon $(0, 1)$ correspond le voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}. Par conséquent, il résulte de la convergence de la série (7) en x_0 que $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine $D(\alpha, x_0)$ et qu'elle est continue au voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}. Le théorème est démontré.

Remarquons que la simplicité extrême de la démonstration vient du fait que $\varphi(u, \alpha)$ est supposé holomorphe en 1, ce qui, grâce aux propriétés bien connues des représentations conformes, entraîne immédiatement la correspondance indiquée des deux voisinages.

7. Inversement *si, pour α assez petit, $f(x)$ est holomorphe dans $D(\alpha, x_0)$ et continue sur $C(\alpha, x_0)$, la suite des moyennes arithmétiques des*

$$H_n(x_0, \alpha) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(a_\nu x^\nu, \alpha),$$

c'est-à-dire la suite

$$\sigma_0 = a_0, \qquad \sigma_1 = \frac{a_0 + H_1(a_1 x, \alpha)}{2}, \qquad \ldots,$$

$$\ldots, \quad \sigma_n(x_0, \alpha) = \frac{a_0 + H_1 + \ldots + H_n}{n+1}, \quad \ldots,$$

a, pour $n = \infty$, une limite bien déterminée et cette limite est égale à la valeur $f(x_0)$ vers laquelle tend $f(x)$ si l'on s'approche de x_0 à l'intérieur ou sur la frontière de $D(\alpha, x_0)$.

En effet, d'après nos hypothèses, $f(x)$ est holomorphe dans $D(\alpha, x_0)$; *a fortiori*, dans le domaine de x défini par l'équation

$$x = x_0 \varphi(u, \alpha),$$

dans laquelle u parcourt une circonférence de rayon inférieur à 1. L'égalité (8) est donc valable pour $x = x_0$ si l'on astreint u à prendre des valeurs de modules inférieurs à 1 :

$$f[x_0 \varphi(u, \alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(a_n x_0^n, \alpha) u^n \qquad |u| < 1.$$

Le second membre est donc une fonction de u holomorphe dans le cercle de rayon 1, de sorte que son cercle de convergence est l'unité.

De plus, $f(x)$ est par hypothèse continue sur $C(\alpha, x_0)$, elle est donc continue de même de la circonférence de rayon 1 qui lui correspond. Mais les coefficients tayloriens d'une fonction continue sur la circonférence de rayon 1 tendent vers 0 si l'indice croît indéfiniment. On le voit, par exemple, en appliquant aux parties réelles et imaginaires le théorème de M. Lebesgue ([1]) selon lequel

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0,$$

si $f(x)$ est sommable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Nous pouvons donc nous servir du théorème fondamental du Chapitre II (n° 4) pour établir que la limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 + H_1(a_1 x, \alpha) + \ldots + H_n(a_n x^n, \alpha)}{n+1}$$

existe et qu'elle est égale à $f(x_0)$. Le théorème réciproque est donc démontré.

Si la fonction $\varphi(u, \alpha)$ satisfait à la condition restrictive (A), c'est-à-dire est telle que les contours $C(\alpha, 1)$ des domaines correspondants $D(\alpha, 1)$ ont tous au point 1 des courbures finies tendant vers 0 avec α, l'hypothèse que $f(x)$ est holomorphe dans un petit cercle passant par x_0 et ayant pour diamètre arbitrairement petit un segment de la tangente à l^{x_0} en x_0 entraîne que $f(x)$ est holomorphe dans $D(\alpha, x_0)$, α étant suffisamment petit. On arrive ainsi au théorème suivant :

Si $f(x)$ est continue et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage

---

([1]) LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 61; Paris, Gauthier-Villars, 1906.

circulaire de x_0 *vers* l^{x_0}, *on a, pour* α *assez petit*,

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 + \mathrm{H}_1 + \ldots + \mathrm{H}_n(a_n x_0^n, \alpha)}{n+1} = f(x_0).$$

8. Si la fonction n'a pas de limite pour $x = x_0$ au voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}, il est très important de décider si elle reste bornée ou non. A cet égard, nous allons démontrer le théorème :

Si, pour α *assez petit, la série représentative* (9) *reste bornée pour* x_0, *la fonction représentée* $f(x)$ *est bornée et,* x_0 *excepté, holomorphe au voisinage angulaire du point* x_0 *vers* l^{x_0}; et inversement, *si la fonction est bornée et,* x_0 *excepté, holomorphe au voisinage circulaire de* x_0 *vers* l^{x_0}, *la suite*

$$|\sigma_n(x_0, \alpha)| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

est bornée pour α *assez petit.*

Le raisonnement précédent s'applique aussi dans le cas présent. En effet, on voit facilement que si $\mathrm{S}_n(x_0, \alpha)$ est bornée pour $n = \infty$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mathrm{S}_n(x_0, \alpha) - \mathrm{S}_{n-1}(x_0, \alpha)]\, u^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{G}_n(a_n x_0^n, \alpha) u^n$$

est convergente dans le cercle de rayon 1, et la fonction holomorphe de u représentée par elle reste bornée si l'on s'approche du point 1 au voisinage angulaire de 1 vers le rayon (0, 1). La suite du raisonnement est identique au raisonnement précédent et nous sommes amenés ainsi à la première partie du théorème.

Inversement, supposons que la fonction envisagée soit bornée et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, ce qui revient à dire, la condition restrictive (A) étant supposée satisfaite, qu'il y a un domaine $\mathrm{D}(\alpha, x_0)$ où la fonction est holomorphe, de même que sur sa frontière, excepté le point x_0, et où l'on a encore

$$|f(x)| < \mathrm{A}$$

et démontrons que les modules des moyennes arithmétiques

$$|\sigma_n(x_0, \alpha)|$$

sont bornées.

Remarquons que, dans le cas où la condition (A) n'est plus remplie, le voisinage circulaire doit être remplacé par le domaine $D(\alpha, x_0)$ et l'on arrive ainsi à un théorème plus général sans qu'on ait à changer le raisonnement qui suit.

Dans le cas considéré, la fonction limite de $f[x_0\varphi(u, \alpha)]$ existe et elle est continue pour chaque point de l'intervalle $(0, 2\pi)$, excepté $\theta = 0$ et, de plus, elle est bornée au voisinage du dernier point. Cette fonction limite est donc intégrable. Par suite, dans la formule de Cauchy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)\,du}{u^{n+1}},$$

on peut prendre pour chemin d'intégration le cercle de rayon 1. On voit ainsi que les coefficients $b_n = G_n(a_n x_0^n, \alpha)$ tendent vers 0 pour $n = \infty$ (α étant suffisamment petit). Nous pouvons donc appliquer notre théorème de la page 38, ce qui donne immédiatement le résultat que la suite $|\sigma_n(x_0, \alpha)|$ est bornée.

9. Il reste encore à étudier le cas où la fonction devient infinie au point considéré. A cet effet, faisons tout d'abord la remarque suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit holomorphe, x_0 excepté, au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, est que, pour α assez petit, on ait

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)|} = 1.$$

Il est évident que

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)|} \leqq 1,$$

car x_0 est un point singulier de la fonction étudiée, et le cercle de rayon plus grand que 1 dans le plan de u correspond à un domaine qui contient x_0 à son intérieur.

Supposons donc que, pour α assez petit, la limite supérieure en question soit égale à 1. On en conclut immédiatement que la même fonction, considérée comme fonction de x, est holomorphe à l'intérieur du domaine correspondant $D(\alpha, x_0)$ et, *a fortiori*, au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}.

Inversement, si la fonction, le point x_0 excepté, est holomorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, en prenant α suffisamment petit, on peut y tracer un domaine $D(\alpha, x_0)$ à l'intérieur duquel la fonction soit holomorphe. La condition (A) est supposée satisfaite. On en conclut que, d'après la formule (10), la série de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)\, u^\nu$$

représente la fonction $f(x)$ à l'intérieur de $D(\alpha, x_0)$, c'est-à-dire à l'intérieur du cercle de rayon 1 dans le plan de u, ce qui revient à dire que, pour α assez petit,

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)|} = 1.$$

Notre remarque est donc vérifiée.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction devienne infinie (ne reste pas bornée) *et, x_0 excepté, soit holomorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} est que, pour α assez petit,*

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)|} = 1,$$

et que, quelque petit que soit α,

$$\limsup_{\nu=\infty} |\sigma_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)| = \infty.$$

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. On voit par nos développements antérieurs que, d'après les hypothèses faites et α étant suffisamment petit, la série de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)\, u^\nu$$

représente une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1 ; la première condition est donc remplie pour α assez petit, grâce à la remarque faite il y a un instant.

Mais il est évident que les moyennes arithmétiques des $S_n(x_0, \alpha)$ deviennent infinies avec n ; en effet, dans le cas contraire, d'après le théorème du numéro précédent, aussi la fonction envisagée serait bornée au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Démontrons maintenant que les deux conditions sont suffisantes.

La première étant satisfaite, la fonction de u

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)\, u^\nu$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1 ; par conséquent la même fonction, considérée comme fonction de x, est, x_0 excepté, holomorphe dans le domaine $D(\alpha, x_0)$ et *a fortiori*, x_0 excepté, au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}.

D'autre part, la seconde condition remplie, la fonction ne peut rester bornée au voisinage envisagé. En effet, si pour α quelconque elle restait bornée, grâce à l'holomorphie établie, on pourrait prendre α assez petit pour que le théorème du numéro précédent soit applicable, et d'après ce théorème la suite $|\sigma_n(x_0, \alpha)|$ serait bornée, ce qui est contraire à notre hypothèse. Par conséquent, la fonction ne reste pas bornée, ce qui était à démontrer.

L'hypothèse que la fonction soit holomorphe au voisinage considéré est nécessaire pour écarter l'effet des autres singularités possibles. On pourrait dire que la fonction devient infinie exclusivement à cause de la singularité au point x_0.

10. Reste encore à examiner le cas où

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)|} > 1.$$

A cet égard, nous allons esquisser rapidement la démonstration du théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ ait une infinité de points singuliers au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} est que, quelque petit que soit α,

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(a_\nu x_0^\nu, \alpha)|} > 1.$$

Supposons que nous ayons une infinité de points singuliers au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}. Par définition, le point x_0 reste en dehors de $A^{(\alpha)}$ pour α quelconque, de sorte que la série de Taylor de la fonction $f[x_0\varphi(u, \alpha)]$ doit avoir un rayon de convergence inférieur à 1 pour α quelconque, car dans le cas contraire $f(x)$ serait holomorphe, x_0 excepté, dans $D_\alpha^{x_0}$ et *a fortiori* dans le voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}. La condition indiquée est donc bien nécessaire.

Inversement, si, pour α quelconque, la condition proposée est remplie, c'est que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n(a_n x_0^n, \alpha)\, u^n$$

est moindre que l'unité. Il y a des points singuliers à l'intérieur de $D(\alpha, x_0)$, quelque petit que soit α ; et comme, par hypothèse, il n'y en a pas sur la ligne l^{x_0} (x_0 excepté), le voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} doit en contenir une infinité.

Avec ce théorème, nous avons le premier critère général, à ce qu'il nous semble, pour établir, en partant de la série de Taylor, l'existence d'une infinité de points singuliers au voisinage d'un point.

L'ÉTUDE DES POINTS CRITIQUES ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUES AUX SOMMETS DE L'ÉTOILE CURVILIGNE E^l D'ESPÈCE l.

11. Après avoir examiné la relation entre l'allure générale de la fonction et celle de la série représentatrice, nous allons préciser davantage le rapport de la manière dont la fonction devient infinie en un sommet x_0 de l'étoile E^l à la nature de la divergence de la série en x_0, c'est-à-dire nous allons chercher les propriétés de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n(a_n x_0^n, \alpha),$$

qui pourront nous déceler l'allure particulière en vue de la fonction envisagée. Nous considérerons tout spécialement les points critiques algébrico-logarithmiques aux sommets de l'étoile curviligne E^l d'espèce l.

Supposons que le sommet x_0 soit un point critique algébrico-logarithmique de $f(u)$. La fonction de u

$$f[x_0 \varphi(u, \alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(a_n x_0^n, \alpha) u^n$$

est holomorphe dans le cercle de rayon 1 si l'on a choisi α suffisamment petit. En effet, comme x_0 est un sommet de E^l, $f(x)$ est holomorphe dans chaque point de la courbe l^{x_0} et, de plus, par hypothèse, x_0 est un point singulier isolé de $f(x)$. Mais la courbe fermée $D(\alpha, x_0)$ qu'on obtient en faisant parcourir par u le cercle de rayon 1 dans l'expression $x_0 \varphi(u, \alpha)$, tend, pour $\alpha = 0$, vers la courbe simple l^{x_0}. Il en résulte que, pour α assez petit, $f(x)$ sera holomorphe dans $D'(\alpha, x_0)$, de même que sur sa frontière $C(\alpha, x_0)$, excepté le seul point x_0. En d'autres termes, la fonction de u, $f[x_0 \varphi(u, \alpha)]$, est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1 et x_0 est son point singulier unique sur sa circonférence.

Regardons d'autre part ce que l'expression

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\rho}}$$

devient quand on l'exprime en fonction de u, le nombre ρ étant quelconque.

Évidemment

$$\frac{1}{\left(- \frac{x}{x_0}\right)^{\rho}} = \frac{1}{[1 - \varphi(u, \alpha)]^{\rho}}. \tag{8}$$

Mais, par hypothèse, $\varphi(u, \alpha)$ est holomorphe au point 1 et

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=1} \neq 0;$$

car $\varphi(u, \alpha)$ effectue une transformation conforme autour de ce point. Par conséquent

$$\varphi(u, \alpha) = 1 + \beta(u - 1) + \gamma(u - 1)^2 + \ldots,$$

et $\beta \neq 0$. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\rho}} = \frac{1}{[\beta(u - 1) + \gamma(u - 1)^2 + \ldots]^{\rho}} = \frac{1 + (u - 1)P(u - 1)}{\beta^{\rho}(u - 1)^{\rho}} \tag{9}$$

où $P(x)$ est une série de Mac Laurin en x. Cela nous montre que la transformation conforme ne change pas la nature de la singularité en question.

On peut faire le même calcul concernant

$$\log^q \frac{1}{1-\frac{x}{x_0}},$$

où q est est un entier positif. En effet,

$$\frac{1}{1-\frac{x}{x_0}} = \frac{1+(u-1)Q(u-1)}{\beta(u-1)},$$

de façon que

$$\log^q \frac{x}{1-\frac{1}{x_0}} = \left\{\log\frac{1}{\beta(u-1)} + \log[1+(u-1)Q(u-1)]\right\}^q.$$

En effectuant le calcul, on obtient un polynome en $\log\frac{1}{u-1}$ de degré q où le coefficient de $\log^q\frac{1}{u-1}$ est l'unité et les autres coefficients sont des fonctions de u holomorphe en 1. En effet le second terme de la parenthèse est holomorphe au voisinage de 1.

Il en est de même de la fonction

$$\frac{\log^q \dfrac{1}{1-\frac{x}{x_0}}}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^\rho} = \frac{\log^q \dfrac{1}{1-\varphi(u,\alpha)}}{[1-\varphi(u,\alpha)]^\rho} = \sum \gamma_n u^n, \tag{10}$$

et cette fonction de u est holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence du cercle de rayon 1, excepté le point 1. Et, de plus, ce dernier point est un point critique algébrico-logarithmique d'ordre (q,ρ).

12. Cela posé, exprimons que x_0 est un point critique algébrico-logarithmique de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{AP_q\left(\log\dfrac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right)}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^\rho} + \frac{P_{q_1}\left(\log\dfrac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right)}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{\rho_1}} + \ldots + f_1(x), \tag{11}$$

où $P_q(x)$ est un polynome de degré q en x commençant par x^q; les nombres positifs q et $\rho_1 < \rho$, $\rho_2 < \rho_1$, ..., sont en nombre fini, $f_1(x)$ est d'ordre négatif en x_0.

Effectuons la transformation

$$f[x_0\varphi(u, \alpha)] = F(u) = \frac{A}{\beta^\rho}\frac{Q\left(\log\frac{1}{u-1}\right)}{(1-u)^\rho}[1+(u-1)p(u)]$$
$$+\frac{Q_1\left(\log\frac{1}{u-1}\right)}{\beta^{\rho_1}(u-1)^{\rho_1}}[1+(u-1)p_1(u)]+\ldots+f_1[x_0\varphi(u, \alpha)],$$

où $Q(x)$ est un polynome de degré q en x et les $p_i(u)$ sont holomorphes pour $|u|\leqq 1$, enfin $f_1[x_0\varphi(u, \alpha)] = \varphi(u)$ est d'ordre négatif au voisinage de 1.

D'autre part, nous avons vu que, pour α assez petit,

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(a^n x_0^n, \alpha)u^n;$$

où le rayon de convergence est l'unité. Pour déterminer l'ordre de grandeur de $G_n(a_n x_0^n, \alpha)$ posons encore

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\eta_n u^n$$

et

$$F(u)-\varphi(u) = \psi(u) = \frac{AQ\left(\log\frac{1}{u-1}\right)}{\beta^\rho(u-1)^\rho}[1+(u-1)p(u)]+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n u^n.$$

Regardons successivement ε_n et η_n. Tout d'abord $\lim\limits_{n=\infty}\eta_n = 0$, car les η_n sont les coefficients tayloriens d'une fonction continue sur son cercle de convergence de rayon 1. La fonction $\psi(u)$ a pour point singulier unique sur son cercle de convergence le point 1. De plus, en prenant les $k \geqq \rho - 1$ premiers termes du développement

$$p(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(u-1)^n,$$

on sépare la partie dominante de la singularité

$$\frac{AQ\left(\mathrm{lo}\,\frac{1}{u-1}\right)}{\beta^\rho(u-1)^\rho}[1+(u-1)\,p(u)]$$

de sa partie continue sur le cercle. En faisant de même pour les autres termes, on sépare la partie dominante de $\psi(u)$ de sa partie continue. Mais cette dernière partie a un développement taylorien dont les coefficients tendent évidemment vers o quand leurs indices croissent indéfiniment.

D'autre part, nous avons calculé déjà (p. 52) l'ordre de grandeur des coefficients γ_n de la fonction

$$\frac{Q\left(\log\frac{1}{u-1}\right)}{(u-1)^\rho};$$

on a ainsi, du moins pour $\rho > 1$,

$$\lim_{n=\infty}\frac{\gamma_n}{n^{\rho-1}\log^q n}=\frac{1}{\Gamma(\rho)},$$

ce qui, ajouté aux résultats partiels relatifs aux autres parties de $F(u)$, nous donne la formule importante

$$\lim_{n=\infty}\frac{G_n(a_n x_0^n,\alpha)}{n^{\rho-1}\log^q n}=\frac{A}{(-\beta)^\rho\,\Gamma(\rho)}. \tag{12}$$

Si ρ n'est pas supposé supérieur à 1, nous devons considérer les sommes

$$S_n(x,\alpha)=G_0+G_1(a_1x,\alpha)+\ldots+G_n(a_nx^n,\alpha).$$

Tout ce qu'il faut ajouter au raisonnement précédent, c'est que $\mu(u)$ est holomorphe sur le cercle de rayon 1, excepté le point 1, où elle est d'ordre négatif. Il s'ensuit, en effet, que sa série de Mac Laurin converge à ce point :

$$\lim_{n=\infty}\frac{S_n(x_0,\alpha)}{\eta^\rho\log^q n}=\frac{A}{\beta^\rho\,\Gamma(\rho+1)}.$$

La série envisagée

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(a_nx^n,\alpha)$$

nous décèle donc la nature de la singularité d'une manière entièrement simple. Le paramètre α étant pris suffisamment petit, *les* S_n *de la série numérique*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(a_n x_0^n, \alpha)$$

ont un ordre de grandeur identique à celui de la fonction et ils permettent de calculer successivement toutes les constantes qui caractérisent la singularité étudiée.

13. On peut étendre enfin tous ces résultats à des singularités plus compliquées où ce n'est que la partie dominante de la singularité qui est supposée algébrico-logarithmique. Il ne faut qu'ajouter une hypothèse qui nous assurera que, pour α assez petit, le point singulier x_0 se trouve sur le cercle de convergence de la série

$$\sum_{n=0} G_n(a_n x_0^n, \alpha) u^n.$$

Par exemple, si l'on suppose que $f(x)$ est holomorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} et que $\varphi(u, \alpha)$ satisfait à la condition restrictive (A), nous n'avons qu'à nous servir du résultat principal du Chapitre II (p. 38) afin d'éliminer la contribution de la fonction $f_1(x)$ qu'il suffit de supposer continue en x_0 et nous arriverons au théorème suivant :

Si la fonction $f(x)$, *holomorphe dans le voisinage circulaire de* x_0 *vers* l^{x_0}, *a sa partie dominante algébrico-logarithmique, c'est-à-dire si elle peut s'écrire au voisinage de* x_0 *sous la forme* (11), *on a nécessairement*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(x_0, \alpha)}{n^{\rho}(\log n)^q} = \frac{A\,\Gamma(2)}{(-\beta^{\rho})\Gamma(\rho+1)}, \tag{13}$$

où

$$\sigma_n(x_0, \alpha) = \frac{S_0 + \ldots + S_n(x_0, \alpha)}{n+1}.$$

Nous avons donc dans le développement (9) une série qui satisfait presque toutes nos exigences concernant la simplicité et la précision dans la représentation des singularités situées aux sommets de l'étoile curviligne d'espèce l. En effet, l'allure générale de la fonction $f(x)$ se manifeste d'une manière explicite et complète dans l'allure de la série numérique

$$\sum_{n=0} G_n(a_n x_0^n, \alpha),$$

du moins pour α assez petit. Et, comme nous venons de le voir, les singularités particulières à partie dominante algébrico-logarithmique sont caractérisées à leur tour par la même série et avec la même précision et simplicité. L'ordre de grandeur des moyennes arithmétiques des $S_n(x_0, \alpha)$ coïncide tout simplement avec celui de $f(x)$ en x_0 et les coefficients A, de même que les degrés (q_1, ρ), (q_2, ρ_1), ..., qui, ensemble, caractérisent la partie dominante de la singularité, se calculent très facilement par la formule (13), si l'on retranche successivement la partie déjà trouvée et l'on applique de nouveau la même formule.

La portée de cette méthode est assez considérable. Quel est, en effet, le but à atteindre par une pareille méthode? Tous les développements étudiés dans ce livre sont formés par des séries de polynomes ou des fonctions entières, c'est-à-dire des séries de fonctions uniformes, et il n'y en a guère d'autres espèces. D'autre part, l'étude générale des singularités consiste à examiner la fonction dans ses points réguliers qui se trouvent au voisinage de ses points singuliers. Par conséquent, cette étude exige une représentation de la fonction envisagée au voisinage du point singulier en vue. Il est donc évident que la méthode dont nous nous sommes servis dans ce livre ne nous donne pas un moyen absolument parfait pour effectuer l'étude générale des singularités, en ce sens qu'une seule représentation de ce genre ne nous livrera pas tous les points singuliers de la fonction, parce qu'une série de fonctions uniformes ne peut représenter qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable indépendante x et qu'une fonction analytique a, en général, une infinité (dénombrable) de déterminations pour chaque point x. Ce n'est qu'une partie des déterminations, une branche si l'on veut, de $f(x)$ qui est donnée par le développement du genre considéré. Ce ne sont donc que les points singuliers situés à la frontière de cette branche qui peuvent être étudiés réellement par les méthodes indiquées.

Mais on peut formuler le problème des singularités d'une manière un peu différente. Soit x_0 un point quelconque du plan complexe. Supposons qu'on veuille explorer l'entourage de ce point, c'est-à-dire déterminer l'allure de la fonction $f(x)$ à son voisinage. D'abord cela peut dépendre du côté ou de la direction par où l'on s'approche de ce point; mais cette allure peut se changer de fond en comble si l'on choisit un chemin l^{x_0} joignant l'origine à x_0, différent du premier par où l'on est allé d'abord à x_0. Par exemple $f(x)$ peut être holomorphe en x_0 si l'on y aboutit par le chemin l^{x_0}, quoique ce point fût singulier pour le premier chemin, etc. Force nous est donc de choisir un chemin bien déterminé allant de o à x_0 et retrécir le problème à l'examen de l'entourage de x_0 suivant un chemin bien déterminé l^{x_0}.

La représentation (9) nous donne la solution du problème pour les courbes l^{x_0} *qui n'ont pas de points multiples*. En regardant la limite supérieure de la suite

$$\sqrt[n]{|\,G_n(a_n x_0^n, \alpha)\,|},$$

on décidera tout d'abord si x_0 est le premier point singulier sur l^{x_0} ou non. Dans le dernier cas, la méthode est inapplicable. Mais le problème n'a pas de sens non plus, car, pour explorer le voisinage d'un point singulier, il faut passer par des courbes sur lesquelles $f(x)$ est holomorphe, excepté l'extrémité de x_0. Dans le premier cas, les théorèmes précédents nous donnent des renseignements assez précis sur l'allure de la fonction au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}.

14. Il reste à examiner le cas le plus général où l'on ne suppose plus que la courbe envisagée soit simple, c'est-à-dire sans points multiples. Cette extension des résultats acquis jusqu'ici est indispensable si l'on veut étudier les différentes branches d'une fonction multiforme, car c'est justement en tournant autour des points singuliers qu'on arrive à des déterminations distinctes de la fonction étudiée.

Prenons une courbe l *quelconque*, partout analytique et régulière (extrémités comprises) joignant les points $x = 0$ et $x = 1$. Soit s

l'arc de courbe compté positivement à partir de $x=0$ vers $x=1$, et soit s_0 la longueur de l'arc total entre 0 et 1, et soit enfin $t=\frac{s}{s_0}\cdot$ Si l'on pose $x=u+iv$, u et v sont pour $0\leqq t\leqq 1$ des fonctions réelles et holomorphes de t : $u=g_1(t)$, $v=g_2(t)$. La fonction

$$x=g_1(t)+ig_2(t)=\psi(t)$$

est holomorphe pour $0\leqq t\leqq 1$, et quand t décrit l'intervalle $(0, 1)$, la variable x décrit la courbe donnée l.

On peut donc transformer la fonction donnée $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ par la formule

$$(14)\qquad f[\psi(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[\psi(t)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n,$$

ou, plus généralement,

$$(15)\qquad f[x\varphi(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n[\psi(t)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)\,t^n,$$

où $p(x)$ est holomorphe et linéaire en ax, a_2x_2, ..., a_nx^n. Le développement (15) est valable pour un x quelconque, mais le rayon de convergence de cette série de Taylor dépend de x. En particulier, si $f(x)$ est holomorphe le long de la courbe l^{x_0} définie par $x_0\psi(t)$, la variable t variant de 0 à 1, la fonction de t, $f[x_0\psi(t)]$, sera holomorphe le long du rayon $(0, 1)$. On peut donc appliquer à cette série la méthode que nous exposions tout à l'heure. Prenons, par exemple, une suite de transformations conformes $\varphi(x,\alpha)$ telle que les courbes $\varphi(e^{i\theta},\alpha)$, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, se réduisent au segment $(0, 1)$ quand α s'approche indéfiniment de 0. C'est le cas simple de l'étoile rectiligne. On obtient ainsi la formule

$$(16)\qquad f[x\varphi(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n[p_n(x)t^n,\alpha]:$$

où Q_n est homogène et linéaire en $p_i(x)t_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Pour chaque x qui satisfait à la condition, énoncée ci-dessus pour x_0, le point $t=1$ est un point intérieur à l'étoile attachée à la fonction de t

$$F(t)=f[x\varphi(t)].$$

On peut donc dans (16) remplacer t par 1

$$(17) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n[p_n(x), \alpha] = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x, \alpha),$$

où $R_n(x, \alpha)$ est homogène et linéaire en $a_1 x^1, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$. Cette formule, pour a assez petit, représente $f(x)$ en chaque point x du plan complexe tel que $f(x)$ est holomorphe sur la courbe l^x. C'est donc une représentation qui, théoriquement du moins, permet d'explorer vers le côté de la tangente à l^{x_0} en x_0 le voisinage d'un point singulier x_0 situé à l'extrémité d'une courbe $x_0 \psi(t)$.

15. Supposons donc que x_0 soit un tel point singulier et regardons le développement (16). D'après la formule (15) la fonction $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n$ est holomorphe autour de l'origine, quelle que soit la valeur de x supposée pourtant finie. Il est donc permis de se servir du développement (14). On obtient ainsi en tous cas la formule (16) et son domaine de convergence (α tendant vers 0) est l'étoile rectiligne de $F(t)$. Si, en particulier, x_0 est un sommet de l'étoile curviligne E^l d'espèce l attachée à la fonction $f(x)$, nous sommes sûrs que $F(t)$ est holomorphe pour $0 \leqq t \leqq 1$; donc le point 1 est un sommet de l'étoile rectiligne attachée à $F(t)$ et l'on peut appliquer à $F(t)$ au point 1 tous les théorèmes démontrés précédemment. Il en résulte que si, pour α assez petit, la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n[p_n(x_0), \alpha]$$

est convergente, la fonction de t, $f[x_0 \psi(t)]$, est continue et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage angulaire de 1 vers (0, 1). Mais $\psi(t)$ est holomorphe au point 1 ; si l'on a donc $\psi'(1) \neq 0$, ce que nous supposerons dans la suite, afin que $x_0 \psi(t)$ effectue une transformation conforme autour du point 1, on peut en conclure que $f(x)$ est continu et, x_0 excepté, holomorphe dans le voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}.

Nous avons donc poussé aussi loin que possible la généralisation du célèbre théorème d'Abel et nous aboutissons au théorème suivant :

Soit x_0 le sommet d'une étoile curviligne quelconque E^l. *Si la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_0, \alpha)$$

est convergente, la fonction $f(x)$ représentée par cette série est holomorphe le long de la courbe l^{x_0}, de même qu'à l'intérieur d'un cercle passant par x_0 et ayant pour diamètre un segment suffisamment petit de la tangente en x_0 à l^{x_0}. De plus, $f(x)$ tend vers une valeur bien déterminée si, après être arrivé au cercle par le chemin l^{x_0}, on s'approche de x_0 dans un angle d'ouverture $< \pi$ et ayant pour bissectrice la tangente de l^{x_0}.

Inversement, si la fonction de t, $f[x_0\psi(t)]$ est holomorphe au voisinage circulaire du point $t = 1$ vers $(0, 1)$, et si elle tend vers une valeur bien déterminée quand on s'approche de 1 à ce voisinage, les moyennes arithmétiques $\sigma_n(x_0, \alpha)$ des $S_n = R_0 + \ldots + R_n$ tendent pour $n = \infty$ vers cette même valeur grâce au théorème de la page 143.

Supposons maintenant que c'est $f(x)$ qui soit continue et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}, le point x_0 étant un sommet de l'étoile E^l, c'est-à-dire x_0 étant le premier point singulier de $f(x)$ le long de la courbe l^{x_0}. On en conclut que $f[x_0\psi(t)]$ est holomorphe le long du segment $(0, 1)$ excepté l'extrémité et que, grâce à la condition $\psi'(1) \neq 0$, au voisinage circulaire de $f(x)$ en x_0 vers l^{x_0}, correspond un voisinage circulaire de $f[x_0\psi(t)]$ en 1 vers $(0, 1)$ en ce sens qu'il y a un petit cercle passant par 1 et ayant son centre sur le rayon $(0, 1)$ assez près de 1 tel que $f[x_0\psi(t)] = F(t)$ soit holomorphe à son intérieur.

Par conséquent, la condition de continuité une fois remplie pour $f(x)$ dans le voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, elle sera remplie *a fortiori* pour la fonction de t, $f[x_0\,\psi(t)]$, en 1 vers le rayon $(0, 1)$. On arrive ainsi au théorème suivant :

Soit x_0 le sommet d'une étoile curviligne quelconque E^l. *Si la fonction $f(x)$ est holomorphe le long de l^{x_0}, de même que* *dans un petit cercle c passant par x_0 et ayant pour diamètre un segment suffisamment petit de la tangente de l^{x_0} en x_0 et si, de plus, $f(x)$ est continu à l'intérieur et sur la circonférence de c, on a nécessairement, pour a assez petit,*

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n(x_0, \alpha) = f(x_0).$$

C'est l'inversion la plus complète obtenue jusqu'ici du théorème de M. Frobenius.

La condition de continuité peut être remplacée par l'hypothèse que $f(x)$ soit bornée dans le voisinage correspondant sans qu'on ait rien à changer dans le raisonnement précédent, basé essentiellement sur la correspondance des voisinages. On aboutit ainsi à des théorèmes analogues où les expressions : *convergence* et *tendant vers une valeur bien déterminée* (*ou continue*) doivent être remplacées par *bornée en valeur absolue.*

En combinant ces quatre résultats comme nous l'avons fait déjà précédemment, on obtient encore deux théorèmes qui ne manquent pas d'intérêt.

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit holomorphe le long de l^{x_0}, de même qu'au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} et qu'elle devienne infinie en x_0, est que, pour α assez petit,

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|R_n(x_0, \alpha)|} = 1,$$

et que, quelque petit que soit α,

$$\limsup_{n=\infty} |\sigma_n(x_0, \alpha)| = \infty.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit holomorphe le long de l^{x_0} et qu'elle ait une infinité de points singuliers au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} est que, quelque petit que soit α,

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|R_n(x_0, \alpha)|} > 1.$$

La démonstration, d'ailleurs très facile, de ces théorèmes, consiste à appliquer des théorèmes correspondants à la fonction de t, $f[x_0, \psi(t)] = F(t)$, en ajoutant que $f(x)$ satisfait au voisinage de x_0 aux mêmes conditions que $F(t)$ au voisinage de 1.

16. Mais le développement (17) est capable de nous fournir des renseignements plus précis encore sur la manière dont $f(x)$ devient infinie en x_0, à supposer qu'il n'y a pas une infinité de points singuliers au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}. Dans la dernière condition c'est ce fait même qui est mis en lumière par le développement considéré.

Supposons donc qu'il y ait un cercle passant par x_0 et ayant pour diamètre un segment de la tangente à la courbe l^{x_0} en x_0 tel que $f(x)$ soit holomorphe à l'intérieur de ce cercle, du moins si l'on arrive à x_0 par le chemin l^{x_0}. Il en résulte que, pour α suffisamment petit,

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|\mathrm{R}_n(x_0, \alpha)|} = 1.$$

On démontre facilement que si la partie dominante de la singularité de $f(x)$ en x_0 est algébrico-logarithmique d'ordre (q, ρ), il en est de même de la partie dominante de $\mathrm{F}(t) = f[x_0\,\psi(t)]$ et inversement. On peut donc appliquer les théorèmes précédents à la fonction $\mathrm{F}(t)$, quoique les hypothèses soient énoncées pour $f(x)$. Par ce procédé bien simple on démontre que les polynomes $\mathrm{R}_n(x_0, \alpha)$ ou leurs sommes $\mathrm{S}_n(x_0, \alpha)$ ou enfin, dans le cas général, les moyennes arithmétiques $\sigma_n(x_0, \alpha)$ de ces sommes sont, pour α assez petit, en relation très simple avec la singularité étudiée. En effet, le degré d'infinitude de ces quantités coïncide avec celui de la fonction $f(x)$, et, pour déterminer les coefficients numériques qui caractérisent complètement la partie dominante de la singularité, on a, pour α assez petit, la formule

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(x_0, \alpha)}{n^\rho (\log n)^q} = c\mathrm{A},$$

où

$$c = \frac{\Gamma(2)}{[-\beta\psi(1)]^\rho\, \Gamma(\rho+1)}$$

et la fonction est supposée mise sous la forme habituelle

$$f(x) = \frac{\mathrm{AP}_q\left(\log \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right)}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^\rho} + \ldots + f_1(x).$$

En définitive, le développement (17) de la fonction $f(x)$, valable dans l'étoile curviligne E^l d'espèce l, *représente* les singularités mêmes aux sommets de cette étoile. En d'autres termes, pour α assez petit, la suite numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_0, \alpha), \tag{18}$$

égale à $f(x_0)$ si $f(x)$ est holomorphe en x_0, n'est pas sans rapport avec l'allure de la fonction même dans le cas où x_0 est un point singulier de $f(x)$ à un sommet de l'étoile E^l. Les propriétés limites de la suite (18) décèlent la nature de la singularité en x_0 vers l^{x_0}. du moins si l'on s'approche de ce point par le chemin l^{x_0}. Et, comme la série de Taylor, c'est-à-dire les coefficients a_n une fois donnés, cette suite peut être formée pour n'importe quelle fonction analytique, en dernière analyse c'est par les coefficients a_n que l'allure de la fonction est caractérisée dans un sommet du voisinage x_0.

Ajoutons encore que certaines singularités échapperont à la portée de la méthode précédente. Ces singularités seront celles qui ne peuvent pas êtr atteintes par une courbe rectifiable de longueur finie. Elles exigeront de nouvelles recherches.

NOTE.

UN THÉORÈME DE RIEMANN.

1. Prenons une série trigonométrique

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

et supposons que

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n=\infty} b_n = 0.$$

La somme de la série absolument et uniformément convergente

$$(2) \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta}{n^2}$$

définit une fonction continue $F(\theta)$. Exprimons les s_n de la série (1) en fonction de $F(\theta)$. On voit facilement que

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos n(\theta - t)\, dt$$

car, après la multiplication par $\cos n(\theta - t)$, on peut intégrer la série (1) terme à terme, et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin lt\, dt = 0$$

excepté pour $k = l$, et, dans ce cas,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\, dt = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt\, dt = \pi.$$

On a par conséquent

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sum_{k=1}^{n} - k^2 \cos k(\theta - t)\, dt.$$

Mais

$$2\sum_{k=1}^{n} - k^2 \cos k(\theta - t) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} \cos k(\theta - t)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta - t)}{\sin\frac{\theta - t}{2}}\right]$$

en vue de la formule

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(\theta - t)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta - t}{2}}\left[\sin\frac{\theta - t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\theta - t}{2}\cos k(\theta - t)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta - t}{2}}\left\{\sin\frac{\theta - t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{2k+1}{2}(\theta - t) - \sin\frac{2k-1}{2}(\theta - t)\right]\right\}$$

$$= \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta - t)}{2\sin\frac{\theta - t}{2}}.$$

Nous avons donc finalement

$$(3) \quad A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta - t)}{\sin\frac{\theta - t}{2}}\right] dt.$$

Riemann a généralisé cette formule en établissant le théorème que voici ([1]). Soit $\rho(t)$ une fonction continue ainsi que ses cinq premières

---

([1]) Notre énoncé du théorème n'est pas aussi général que celui de Riemann quoique ce dernier puisse être encore généralisé (*voir* Hobson, *Theory of functions of a real variable*, p. 741). Mais nous n'avons pas besoin de cette plus grande généralité et nous avons ainsi réussi à simplifier la démonstration si discutée de Riemann.

dérivées entre b et c satisfaisant aux conditions

$$\rho(b) = \rho(c) = \rho'(b) = \rho'(c) = 0,$$
$$\rho(\theta) = 1, \qquad \rho'(\theta) = \rho''(\theta) = \rho'''(\theta) = \rho^{\text{IV}}(\theta) = 0;$$

$\rho''(t)$ n'ayant qu'un nombre fini d'extrêma dans l'intervalle (b, c).

Théorème. — *La différence entre la somme* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ *et l'intégrale*

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta - t)}{\sin\frac{\theta - t}{2}}\right]\rho(t)\,dt$$

où (b, c) *est un intervalle arbitrairement petit contenant le point* $t = \theta$ *à son intérieur, tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$.

2. La démonstration est basée sur le lemme donné également par Riemann.

Soit $\lambda(t)$ une fonction continue ainsi que ses deux premières dérivées satisfaisant aux conditions $\lambda(b) = \lambda(c) = \lambda'(b) = \lambda'(c) = 0$, et $\lambda''(t)$ n'ayant qu'un nombre fini d'extrêma dans l'intervalle (b, c). On a nécessairement

$$\lim_{\mu = \infty} \mu^2 \int_b^c F(t) \cos\mu(t - a)\,\lambda(t)\,dt = 0.$$

L'intervalle (b, c) est quelconque.

Pour le démontrer, remarquons que l'expression considérée peut se mettre sous la forme plus explicite

$$(5) \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2}{n^2}\int_b^c A_n(t)\cos\mu(t - a)\,\lambda(t)\,dt$$

où

$$A_n(t) = a_n \sin nt + b_n \cos nt.$$

Ou bien, en posant

$$B_{\mu+n}(t) = \frac{1}{2}A_n(a)\cos(\mu + n)(t - a) + \frac{1}{2}B_n(a)\sin(\mu + n)(t - a)$$

et

$$B_{\mu-n}(t) = \frac{1}{2}A_n(a)\cos(\mu - n)(t - a) - \frac{1}{2}B_n(a)\sin(\mu - n)(t - a)$$

avec

$$B_n(a) = a_n \cos na - b_n \sin na,$$

le $n^{\text{ième}}$ terme de la série ainsi formée est égal à

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c \frac{d^2 B_{\mu+n}(t)}{dt^2}\lambda(t)\,dt + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c \frac{d^2 B_{\mu-n}(t)}{dt^2}\lambda(t)\,dt$$

qui se transforme, grâce aux conditions imposées à $\lambda(t)$, par deux intégrations par partie en

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c B_{\mu+n}(t)\lambda''(t)\,dt + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c B_{\mu-n}(t)\lambda''(t)\,dt.$$

Le terme d'indice $n=\mu$ est, en particulier,

$$-\int_b^c \lambda(t)\,[A_\mu(t)\cos\mu(t-a)]\,dt.$$

Décomposons l'intervalle (b, c) en un nombre fini k de segment (b', c') dans lesquels $\lambda''(t)$ croît ou décroît constamment. Le second théorème de la moyenne nous donne, ζ étant un nombre convenable entre b' et c',

$$\begin{aligned}&\int_{b'}^{c'} \lambda''(t)\cos(\mu+n)(t-a)\,dt \\ &\quad = \lambda''(b')\int_{b'}^{\zeta}\cos(\mu+n)(t-a)\,dt + \lambda''(c')\int_{\zeta}^{c'}\cos(\mu+n)(t-a)\,dt,\end{aligned}$$

et indépendamment des limites d'intégration et de n,

$$\left|\int_\beta^\gamma \cos(\mu+n)(t-a)\,dt\right| < \frac{2}{\mu},$$

car

$$\int_\beta^\gamma \cos(\mu+n)(t-\alpha)\,dt = \frac{\sin(\mu+n)(t-\gamma) - \sin(\mu+n)(t-\beta)}{\mu+n}.$$

Par conséquent

$$\left|\int_b^c \lambda''(t)\cos(\mu+n)(t-\alpha)\,dt\right| < \frac{2kM}{\mu}$$

où M est le module maximum de $\lambda''(t)$ dans l'intervalle (c, b). Si, enfin, A est la plus grande valeur de $|a_n| + |b_n|$, on a

$$\left|\int_b^c \mathrm{B}_{\mu+n}(t)\,\lambda''(t)\,dt\right| < \frac{2\mathrm{A}k\mathrm{M}}{\mu},$$

de façon que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c \mathrm{B}_{\mu+n}(t)\,\lambda''(t)\,dt\right| < \frac{2\mathrm{A}k\mathrm{M}}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Cette partie de la série (5) tend donc vers o pour $\mu = \infty$.

3. Passons à la seconde partie

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c \mathrm{B}_{\mu-n}(t)\,\lambda''(t)\,dt.$$

Déterminons $n_1 > 3$ par la double condition que : 1°

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left|\int_b^c \lambda''(t)\cos(pt-\mu a+na)\,dt\right| < \varepsilon,\\ &\left|\int_b^c \lambda''(t)\sin(pt-\mu a+na)\,dt\right| < \varepsilon, \end{aligned}\right.$$

pour $|p| \geqq n_1$, ce qu'on peut réaliser indépendamment de μ et de n, car, par le second théorème de la moyenne, on voit aisément que

$$\left|\int_b^c \lambda''(t)\cos(pt-h)\,dt\right| < \frac{2k\mathrm{M}}{|p|};$$

2° $|a_n| + |b_n| < \varepsilon$ pour $n \geqq n_1$.

Soit, d'autre part, $\mu_1 > 2n_1$ et prenons un $\mu > \mu_1$. On a, pour $n \leqq n_1$ et pour $n \geqq n_1 + \mu$,

$$\left|\int_b^c \lambda''(t)\cos[(\mu-n)t-(\mu-n)a]\,dt\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\int_b^c \lambda''(t)\sin[(\mu-n)t-(\mu-n)a]\,dt\right| < \varepsilon;$$

ou encore

$$\left|\int_b^c \mathrm{B}_{\mu-n}(t)\,\lambda''(t)\,dt\right| < \mathrm{A}\varepsilon.$$

Divisons la série (6) qui est à évaluer en cinq parties

$$\sum_{n=1}^{n_1} + \sum_{n=n_1+1}^{\mu-2} + \sum_{n=\mu-1}^{\mu+1} + \sum_{n=\mu+2}^{n_1+\mu-1} + \sum_{n=n_1+\mu}^{\infty}$$

et soit toujours $\mu > \mu_1$. On a tout d'abord

$$\left|\sum_{n=1}^{n_1}\right| < \frac{\varepsilon A \mu_1^2}{(\mu_1 - n_1)^2}\sum_{n=1}^{n_1}\frac{1}{n^2} < 4A\varepsilon\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n^2}$$

parce que la fonction $\dfrac{x^2}{(x-n)^2}$ décroît pour $x > n$; et

$$\left|\sum_{n=n_1+\mu}^{\infty}\right| < \varepsilon A\left[\frac{\mu^2}{(n_1+\mu)^2 n_1^2} + \frac{\mu^2}{(n_1+\mu+1)^2(n_1+1)^2} + \ldots\right]$$

$$< \varepsilon A \sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

D'autre part,

$$\left|\sum_{n=n_1+1}^{\mu-2} + \sum_{n=\mu+2}^{n_1+\mu-1}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mu}\left[\sum_{=n_1+1}^{\mu-2}\frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2\left(\frac{n}{\mu}\right)^2} + \sum_{n=\mu+2}^{n_1+\mu-1}\frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2\left(\frac{n}{\mu}\right)^2}\right]$$

$$\times\int^{c}|\lambda''(t)|\,dt,$$

car, pour $n \geqq n_1$, la quantité $|a_n| + |b_n|$, par suite $|B_{\mu-n}(t)|$, est inférieure à ε. Mais

$$\sum_{n=n_1+1}^{\mu-2}\frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2\left(\frac{n}{\mu}\right)^2} < \int_{\frac{n_1}{\mu}}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\frac{dx}{x^2(1-x)^2}.$$

En effet, étant donné que la fonction

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^2\left(\frac{x}{\mu}\right)^2}$$

décroît pour $x < \frac{\mu}{2}$ et croît pour $x > \frac{\mu}{2}$, on obtient la série envisagée si l'on divise le champ d'intégration en sections :

$$\left(\frac{n_1}{\mu}, \frac{n_1+1}{\mu}\right), \quad \left(\frac{n_1+1}{\mu}, \frac{n_1+2}{\mu}\right), \quad \cdots$$

et l'on prend le minimum de la fonction à intégrer dans la section correspondante.

L'intégrale indéfinie en question est

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + 2\log x - 2\log(1-x) + \text{const.},$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\sum_{n=n_1+1}^{\mu-2} \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2\left(\frac{n}{\mu}\right)^2} \\
&< \frac{1}{\mu}\left[\frac{\mu}{n_1} - \frac{\mu}{\mu-1} + \mu - \frac{\mu}{\mu-n_1} + 2\log\frac{\mu-1}{n_1} - 2\log\frac{1}{\mu-n_1}\right] \\
&< \frac{1}{n_1} + 1 + 2 + \frac{2}{e} < 4.
\end{aligned}$$

De même pour la somme $\sum\limits_{n=\mu+2}^{n_1+\mu-1}$.

Il nous reste à évaluer encore la somme de quatre termes $\sum\limits_{n=\mu-1}^{\mu+1}$ parmi lesquels le terme d'indice $n = \mu$ est, pour $\mu \geqq n_1$, inférieur à

$$\varepsilon\int_b^c |\lambda(t)|\,dt.$$

Nous avons donc

$$\left|\sum_{n=\mu-1}^{\mu+1}\right| < \varepsilon\left[\frac{\mu^2}{(\mu-2)^2 4} + \frac{\mu^2}{(\mu-1)^2} + \frac{\mu^2}{(\mu+1)^2} + \mathrm{K}\right]$$

où

$$\mathrm{K} = \int_b^c |\lambda(t)|\,dt;$$

de sorte que

$$\left|\sum_{n=\mu-1}^{\mu+1}\right| < \varepsilon\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 + 1 + K\right].$$

On peut donc prendre $\mu > \mu_1 > 2n_1$ assez grand pour que la somme de la série (5) soit inférieure en valeur absolue à ε, quelque petit que soit ε donné à l'avance. Le lemme est établi.

4. Pour démontrer enfin le théorème annoncé de Riemann, considérons l'intégrale

$$I_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} F(t)\lambda(t)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right]dt$$

où $\lambda(t) = 1-\rho$ dans l'intervalle (b, c) et $\lambda(t) = 1$ dans les autres points de l'intervalle $(\alpha, \alpha+2\pi)$. On suppose bien entendu que $(\alpha, \alpha+2\pi)$ contienne (b, c). De plus, nous pouvons compléter évidemment la définition de $\lambda(t)$ de façon qu'il ait la période 2π. Par hypothèse $\lambda(\theta) = 0$.

En effectuant la dérivation indiquée dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}2\pi I_n(\theta) = &-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\int_\alpha^{\alpha+2\pi} F(t)\lambda_1(t)\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)\,dt\\ &-(2n+1)\int_\alpha^{\alpha+2\pi} F(t)\lambda_2(t)\cos\frac{2n+1}{2}(\theta-t)\,dt\\ &+\int_\alpha^{\alpha+2\pi} F(t)\lambda_3(t)\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)\,dt,\end{aligned}$$

après avoir posé

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda(t)}{\sin\frac{\theta-t}{2}}, \qquad \lambda_2(t) = \lambda(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right),$$

$$\lambda_3(t) = \lambda(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right).$$

Comme $\lambda(\theta) = \lambda'(\theta) = \ldots = \lambda^{\text{IV}}(\theta) = 0$ et $\lambda^{\text{V}}(t)$ est continue, les fonctions $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ satisfont aux conditions du lemme établi précédemment, les trois intégrales correspondantes tendent donc vers o pour $n = \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(t)\lambda(t)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right]dt = 0.$$

Enfin, d'après la construction de $\lambda(t)$, l'intégrale précédente se décompose en deux

$$\begin{aligned} I_n(\theta) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(t)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right]dt \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c} F(t)\,\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right]dt. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute encore que, selon la formule (3), la première intégrale du second membre est égale à la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, le théorème de Riemann se trouve démontré.

Le théorème ainsi établi nous fournit une condition à la fois nécessaire et suffisante de la convergence d'une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers o, savoir que l'intégrale (4) ait une limite bien déterminée pour $n = \infty$. C'est sous cette forme que nous nous sommes servis dans le texte du théorème de Riemann.

Remarquons enfin que ce résultat est absolument indépendant de toute théorie de la série de Fourier.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

LES RECHERCHES DE M. HADAMARD. L'ORDRE D'UN POINT SINGULIER.

CHAPITRE II.

L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE.

CHAPITRE III.

LA MÉTHODE DE LA SOMMATION EXPONENTIELLE.

CHAPITRE IV.

L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS PAR LA MÉTHODE DE M. MITTAG-LEFFLER.

CHAPITRE V.

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DES SINGULARITÉS.

NOTE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

49122. — Paris, Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions**, publiée sous la direction d'Emile Borel, Membre de l'Institut. Volumes in-8 (25-16) se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions*), par Emile Borel, 3e édit., 1914 .... 15 fr.

Leçons sur les séries divergentes, par Emile Borel; 1901 .... 9 fr.

Leçons sur les fonctions entières, 2e édit., 1921 .... 20 fr.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par Émile Borel, recueillies et rédigées par *Robert d'Adhémar*; 1902.... 7 fr.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par Emile Borel, recueillies et rédigées par *Ludovic Zoretti* ; 1903 ..... 7 fr.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'Ecole Normale supérieure par Emile Borel et rédigées par *Maurice Fréchet*, avec des Notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue ; 1905 .... 9 fr.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par René Baire, rédigées par *A. Denjoy* ; 1905 .... 7 fr.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par Ernest Lindelöf; 1905 .... 7 fr.

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France, par Henri Lebesgue ; 1906 .... 7 fr.

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre, professées au Collège de France par Pierre Boutroux ; avec une *Note* de Paul Painlevé ; 1908 .... 13 fr.

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par Otto Blumenthal; 1910 .... 11 fr.

Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la Fté des Sciences de Paris, par E. Borel, recueillies et rédigées par *A. Denjoy*; 1910.. 11 fr.

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par Paul Montel; 1910 .... 7 fr.

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par Ludovic Zoretti; 1911 .... 7 fr. 50

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910 par Vito Volterra, publiées par *M. Tomassetti* et *F.-S. Zarlatti*; 1913 .... 11 fr.

72736-24 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et C^{ie}, 55, quai des Grands-Augustins.